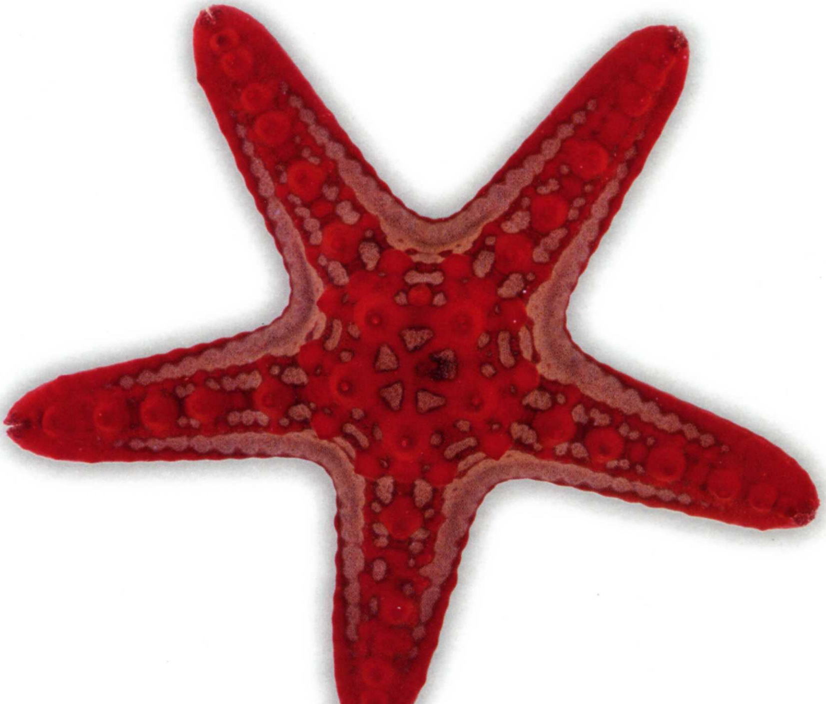
Мир
МАТЕМАТИКИ

1

Золотое сечение

Математический язык красоты



DeAGOSTINI

Мир математики

Мир математики

Фернандо Корбалан

Золотое сечение

Математический язык красоты

Москва — 2013

DeAGOSTINI

УДК 51(0.062)
ББК 22.1
М63

М63 **Мир математики:** в 40 т. Т. 1: **Фернандо Корбалан.** Золотое сечение. Математический язык красоты. / Пер. с англ. — М.: Де Агостини, 2014. — 160 с.

Можно ли выразить красоту с помощью формул и уравнений? Существует ли в мире единый стандарт прекрасного? Возможно ли измерить гармонию с помощью циркуля и линейки? Математика дает на все эти вопросы утвердительный ответ. Золотое сечение — ключ к пониманию секретов совершенства в природе и искусстве. Именно соблюдение «божественной пропорции» помогает художникам достигать эстетического идеала. Книга «Золотое сечение. Математический язык красоты» открывает серию «Мир математики» — уникальный проект, позволяющий читателю прикоснуться к тайнам этой удивительной науки.

ISBN 978-5-9774-0682-6
ISBN 978-5-9774-0641-3 (т. 1)

УДК 51(0.062)
ББК 22.1

Иллюстрации предоставлены:
age photo stock, Aisa, Album, Corbis, Getty Images, iStockphoto.

Оглавление

Предисловие

Теперь более чем когда-либо все в нашем мире основано на числах. Некоторые из них даже имеют собственные имена, например, число пи (π), число *e*.

Среди всех этих замечательных чисел одно является особенно интересным: 1,6180339887... Оказывается, что это число очаровало намного больше блестящих умов, чем π и *e* вместе взятые. Список имен, данных этому числу, довольно длинен и показывает, с каким благоговением к нему относились: золотое число, трансцендентное сечение, божественное число, божественное сечение... Мы будем называть его золотым сечением. Оно обозначается греческой буквой Φ (*фи*) и играет в математике выдающуюся роль, обладая удивительными свойствами и неожиданными связями с творениями природы и человека. Этот выпуск серии «Мир математики» станет нашим путеводителем в невероятный мир золотого сечения.

Мы начнем с обзора многочисленных применений золотого сечения в науке и искусстве на протяжении всей истории человечества, а также расскажем о роли золотого сечения в морфологии (науке о формах) животных и растений. После такого знакомства с самим числом мы будем готовы к более глубокому изучению его замечательных свойств. Наше путешествие начнется на страницах евклидовых «Начал» — величайшего научного бестселлера всех времен и народов — и закончится на суетливых улицах Флоренции эпохи Возрождения, где мы встретимся с ее самым знаменитым сыном — Леонардо да Винчи.

Одним из чудесных свойств золотого сечения является его неисчерпаемая способность порождать изысканные формы: от треугольников до двадцатигранных тел, называемых икосаэдрами. Но несмотря на почетное имя, это число встречается даже в повседневных геометрических объектах, таких как кредитные карты и пятиконечная звезда. Форма кредитных карт представляет собой пример так называемого «золотого» прямоугольника, стороны которого находятся в «золотом» отношении. Так что даже «золотые» прямоугольники повсеместно распространены, не говоря уже о спиралях или звездах. Все они тесно связаны с золотым сечением и часто встречаются в структуре зданий, мозаиках и даже в настольных играх.

Но самым удивительным фактом является связь между золотым сечением и абстрактными идеями красоты и совершенства, которыми так увлечено человечество. В нашем путешествии нас будут сопровождать первоклассные гиды: Леонардо да Винчи, Ле Корбюзье и другие легендарные личности, очарованные красотой золотого сечения. Если мы отвлечемся от творений рук человеческих и посмотрим на окружающую нас природу, то и там мы обнаружим золотое сечение. Развитие многих живых существ следует законам, установленным этим числом, и даже фракталы — красивые структуры, недавно открытые математиками, — связаны с золотым сечением.

В конце нашего увлекательного путешествия мы предложим список книг для желающих глубже познакомиться с миром золотого сечения.

Глава 1

Золотое сечение

Чувствам человека приятны объекты, обладающие правильными пропорциями.

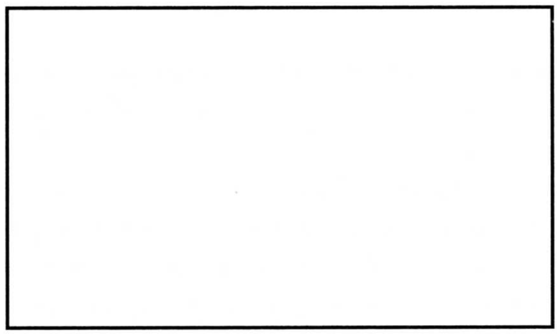
Святой Фома Аквинский (1225–1274)

Что общего имеют такие, казалось бы, не связанные друг с другом природные явления, как расположение семян подсолнечника, элегантная спираль раковины улитки и форма Млечного Пути? Какой универсальный геометрический принцип скрыт в работах великих художников и архитекторов от Витрувия до Ле Корбюзье, от Леонардо да Винчи до Сальвадора Дали? Как бы это невероятно ни звучало, ответом на эти вопросы является просто число, известное на протяжении многих веков, которое постоянно появляется в различных творениях природы и искусства. В результате этому числу были даны такие имена, как «божественное сечение», «золотое сечение» и «золотое число». Записать это число практически невозможно, не потому, что оно слишком большое, — оно чуть больше единицы — а потому, что оно состоит из бесконечного ряда цифр, которые никогда не образуют повторяющуюся группу. Поэтому нам придется использовать математическую формулу для записи золотого сечения:

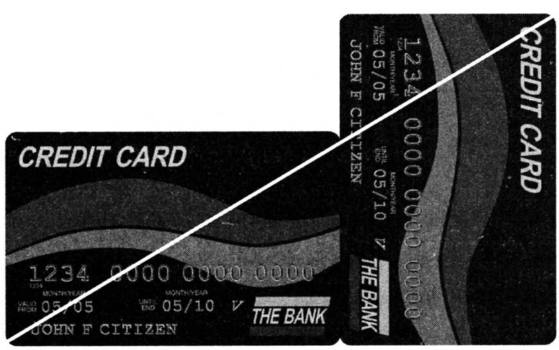
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180339887.$$

Далее в этой главе мы увидим, как это математическое выражение было получено, но стоит признать, что, по крайней мере на первый взгляд, «божественное сечение» не выглядит особенно впечатляющим. Наметанный глаз, однако, сразу заметит что-то подозрительное, раз появился квадратный корень из пяти. Этот корень обладает рядом свойств, которые дали этому числу, как и многим другим подобным, странное название «иррациональных». Иррациональные числа — это особые числа, на которых мы также подробно остановимся.

Давайте попытаемся подойти к золотому сечению геометрически, чтобы найти его предполагаемое божественное свойство. Для этого построим прямоугольник, одна сторона которого в 1,618 раз длиннее другой; получится прямоугольник, в котором соотношение сторон представляет собой золотое сечение (точнее, его приблизительное значение). Вот что у нас получится:



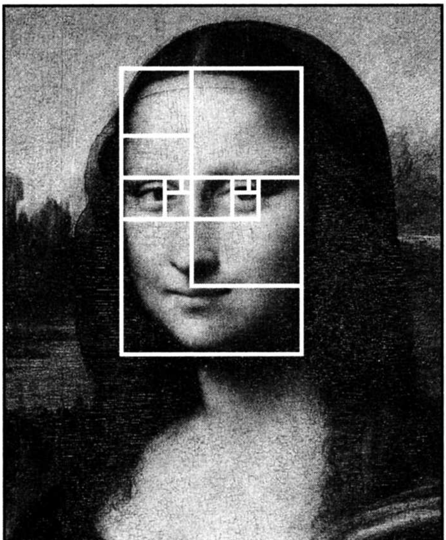
Прямоугольник с таким соотношением сторон называется «золотым». На первый взгляд он может показаться нам обычным прямоугольником. Тем не менее давайте проделаем простой эксперимент с двумя кредитными картами. Положим одну из них горизонтально, а другую вертикально так, чтобы их нижние стороны находились на одной линии:



Если в горизонтальной карте мы проведем диагональную линию и продолжим ее, то увидим, что она пройдет в точности через правый верхний угол вертикальной карты — приятная неожиданность. Проделав этот эксперимент с двумя книгами одинакового размера, а именно с учебниками или книгами карманного формата, мы получим, вполне вероятно, тот же результат. Это свойство является характерным для двух «золотых» прямоугольников одинакового размера. Многие повседневные прямоугольные объекты созданы с таким соотношением размеров. Случайность? Может быть. Или, возможно, такие прямоугольники и другие геометрические формы, использующие золотое сечение, по каким-то причинам особенно приятны глазу. Согласившись с этим предположением, мы разделим мнение величайших художников и архитекторов. Об этом мы подробнее расскажем в четвертой главе. Не случайно в математике золотое сечение принято обозначать греческой буквой *фи* (Ф), первой буквой имени Фидия, знаменитого древнегреческого архитектора.

«Золотой» мир

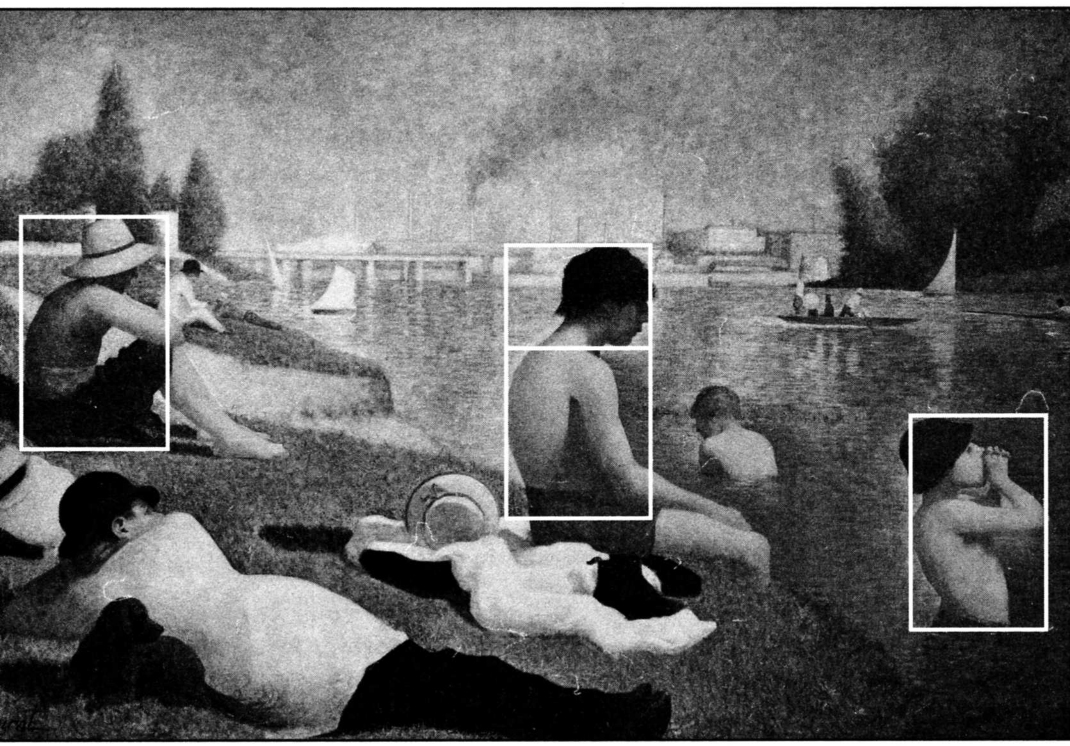
Много написано об этой самой загадочной улыбке в истории искусства, но мы попробуем предложить математическое решение этой загадки. Давайте посмотрим, что произойдет, если наложить несколько «золотых» прямоугольников на изображение лица прекрасной Моны Лизы:



Думал ли Леонардо да Винчи о золотом сечении, работая над своим шедевром? Это кажется маловероятным. Однако мы можем быть вполне уверены, что флорентийский гений придавал большое значение связи между эстетикой и математикой.

Мы еще вернемся к этому вопросу, а пока только заметим, что Леонардо делал иллюстрации к математической книге De Divina Proportione («О божественной пропорции»), написанной его хорошим другом Лукой Пачоли.

Леонардо, конечно, не единственный художник, в чьих работах встречается золотое сечение как в виде отношения двух сторон прямоугольника, так и в более сложных геометрических формах. Этот принцип в своих работах использовали многие художники последующих поколений, в том числе постимпрессионист Жорж Сёра и прерафаэлит Эдвард Бёрн-Джонс. В экстраординарной работе «Тайная вечеря» Сальвадора Дали золотое сечение также играет важную роль. Мало того, что полотно картины имеет размеры 268 на 167 сантиметров (почти идеальный «золотой» прямоугольник), так еще в центре картины изображен монументальный додекаэдр. Эта фигура является одним из правильных многогранников, которые можно вписать в сферу, и тесно связана с золотым сечением. Мы расскажем об этом в третьей главе.

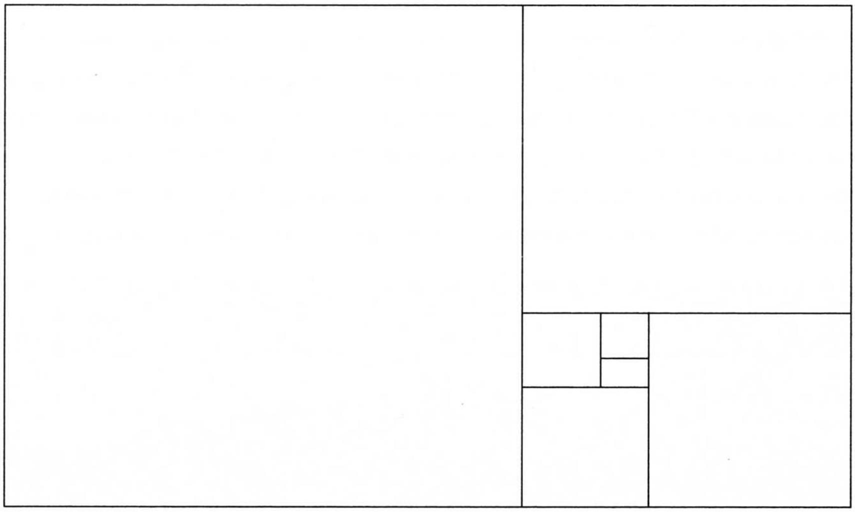


Картина Жоржа Сёра «Купальщики в Аньере» (1884) представляет собой «золотой» прямоугольник. Некоторые из элементов картины также могут быть вписаны в «золотые» прямоугольники.

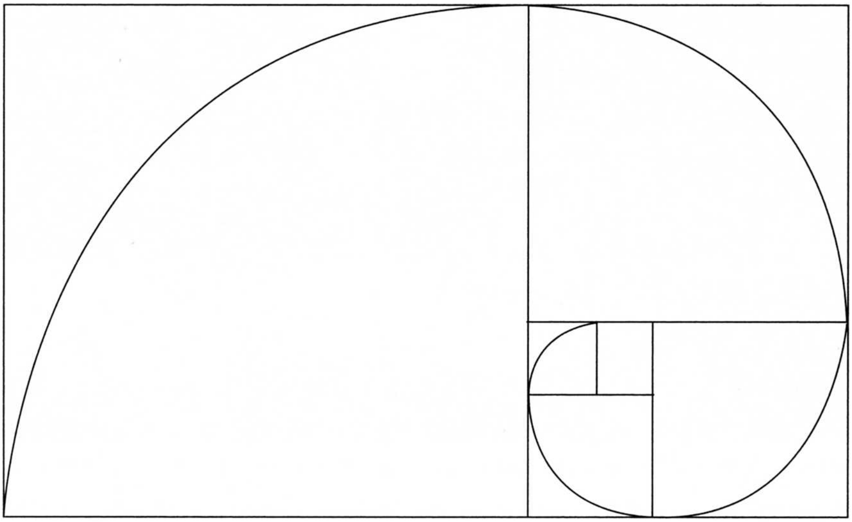
Давайте теперь обратимся к архитектуре, вершине прикладного искусства. Если золотое сечение и вправду создает некую гармонию во всех ее проявлениях, то, возможно, мы увидим это в геометрических формах самых известных в мире зданий. Хотя немного рискованно настаивать на таком заявлении. Золотое сечение действительно появляется во многих замечательных архитектурных творениях на протяжении всей истории человечества, таких как Великая пирамида или некоторые знаменитые готические соборы, но очень часто его присутствие практически незаметно. Тем не менее в некоторых случаях это вполне очевидно. Например, различные элементы фасада Парфенона, всемирно известного шедевра Фидия, представляют собой «золотые» прямоугольники.

Секрет розы

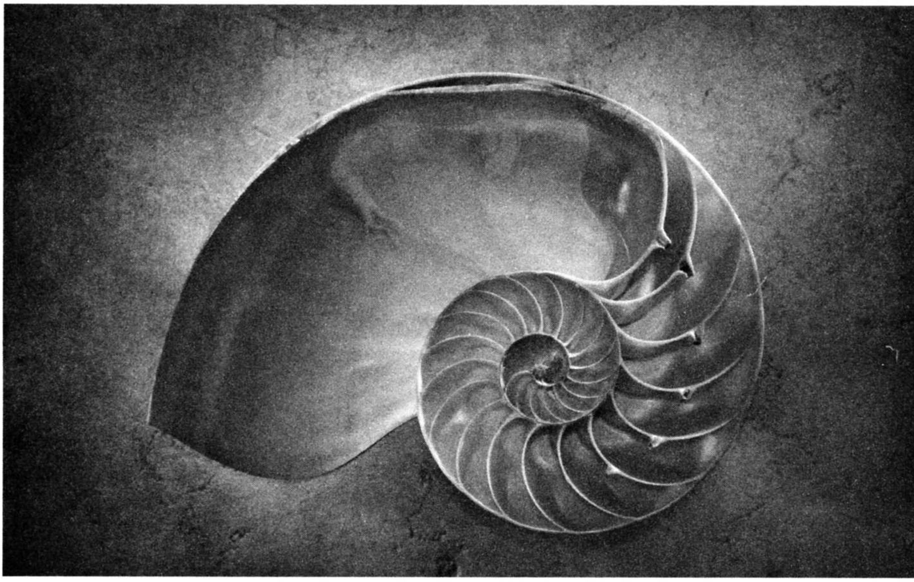
Связь золотого сечения с красотой — вопрос не только человеческого восприятия. Похоже, сама природа выделила Ф особую роль, когда дело касается предпочтения одних форм другим. Чтобы понять это, нам придется углубиться в свойства золотого сечения. Возьмем уже знакомый «золотой» прямоугольник и впишем в него квадрат, стороны которого равны ширине нашего прямоугольника. В результате мы получим новый «золотой» прямоугольник. Повторим эту процедуру несколько раз, как показано на следующем рисунке:



Теперь в каждом из квадратов мы проведем дугу, как показано на рисунке ниже. Радиус каждой дуги равен длине стороны соответствующего квадрата. В результате наш рисунок будет выглядеть следующим образом:

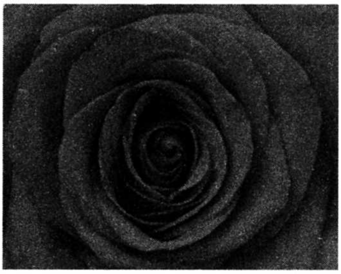


Эта элегантная кривая называется *логарифмической спиралью*. Она вовсе не является математическим курьезом наоборот, эта замечательная линия часто встречается в физическом мире: от раковины наутилуса...



... до рукавов галактик...

... и в элегантной спирали лепестков распустившейся розы.



На примере королевы цветов мы вступаем в другую область, где тоже господствует золотое сечение: мир растений. Присутствие золотого сечения здесь неочевидно и требует введения нового математического понятия: последовательности Фибоначчи. Эта последовательность чисел, описанная итальянским математиком в XIII веке, начинается с двух единиц, а каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. Вот первые пятнадцать чисел этой бесконечной последовательности:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.

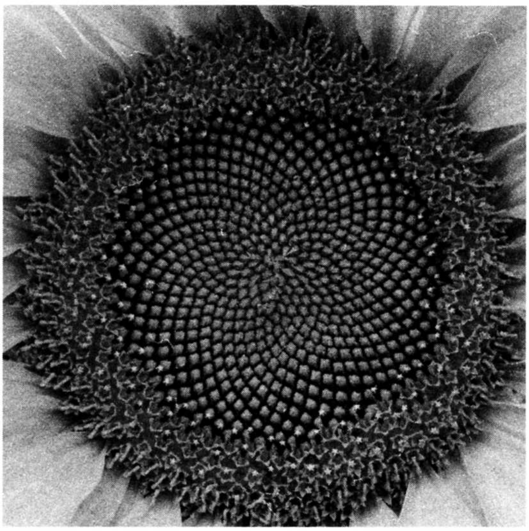
Частное от деления любого числа последовательности на предшествующее ему число будет стремиться к Ф, давая все более точное значение для каждого следующего числа последовательности. Покажем это:

$1/1 = 1$
$2/1 = 2$
$3/2 = 1{,}5$
$5/3 = 1{,}666\ldots$
$8/5 = 1{,}6$
$13/8 = 1{,}625$
$21/13 = 1{,}615348\ldots$
$34/21 = 1{,}61904\ldots$
$55/34 = 1{,}61764\ldots$
$89/55 = 1{,}61818\ldots$
$144/89 = 1{,}61797\ldots$

$\Phi = 1{,}6180339887\ldots$

Для сорокового числа последовательности частное совпадает с «золотым» числом с точностью до четырнадцатого десятичного знака. Связи между золотым сечением и числами Фибоначчи многочисленны и неожиданны, позже мы рассмотрим их более подробно. Достаточно отметить, насколько невероятна эта связь между абстрактным царством чисел и физической реальностью.

Чтобы показать это, мы рассмотрим еще один цветок, внешне сильно отличающийся от розы, — подсолнечник с семенами:



Первое, что мы видим, — семена расположены по спиралям двух видов: по часовой стрелке и против часовой стрелки. Если мы посчитаем спирали по часовой стрелке и против часовой стрелки, то получим два, казалось бы, обычных числа: 21 и 34. Но эти два числа нам уже встречались.

В структуре цветка появились два идущих друг за другом числа из последовательности Фибоначчи. Если мы проведем такой же эксперимент с другим цветком подсолнечника, вполне вероятно, что мы получим другую пару чисел из этой последовательности, например, 55 и 89. Но это не единственный пример, когда мы можем увидеть золотое сечение в структуре растений. Другими примерами являются расположение веток деревьев, количество лепестков на многих цветах и даже форма листьев. Большая часть пятой главы будет посвящена изучению этой, казалось бы, магической связи между числами и органическими формами.

Иррациональные числа и числовые последовательности, Фидий и Леонардо, розы и подсолнечник — все это образует «золотой мир», построенный на удивительном числе Ф.

Числа

Каким бы стал мир, если бы однажды вечером мы легли спать, а ночью все числа исчезли бы вместе с математикой? На следующий день мы проснулись бы в мире без компьютеров, без радио и телевидения, без мобильных телефонов. Не было бы даже чайника, чтобы заварить чашку чая... А что творилось бы на улице! Человеческое общество не может существовать без чисел. Их значение невозможно переоценить, причем не только в современном обществе, основанном на цифровых технологиях. Так было всегда. Числа отражали и направляли человеческую деятельность с доисторических времен, и, пожалуй, они являются самым фундаментальным инструментом цивилизации.

Все цивилизации создавали свои системы счисления, и в каждой культуре это происходило по-разному. Тем не менее, все числа имели одни и те же функции: счет, упорядочивание, измерение и кодирование.

Первые две функции наиболее очевидны. Чтобы уметь считать, мы должны присвоить предметам численные значения, другими словами, дать им номер. Имея ряд пронумерованных объектов, мы займемся следующей естественной задачей: размещением их по порядку. Другие две функции появились значительно позже, так как они связаны с задачами большей сложности. Для измерения необходимы стандарты — набор единиц измерения — чтобы иметь возможность эффективно сравнивать разные результаты измерений. Позже остальных появилась еще одна функция чисел: кодирование. Хоть она и возникла самой последней, но без кодирования, более известного в наши дни как шифрование, невозможно представить современное общество.

БРАХМАГУПТА (ок. 598–660)

Индийский математик и астроном Брахмагупта примерно в 628 г. опубликовал книгу под названием «Брахма-спхута-сиддханта» («Исправленный трактат Брахмы»). Это была первая работа, в которой использовалась десятичная система счисления, практически идентичная современной. Тем не менее, сегодняшний способ записи десятичных чисел является достижением арабской цивилизации.

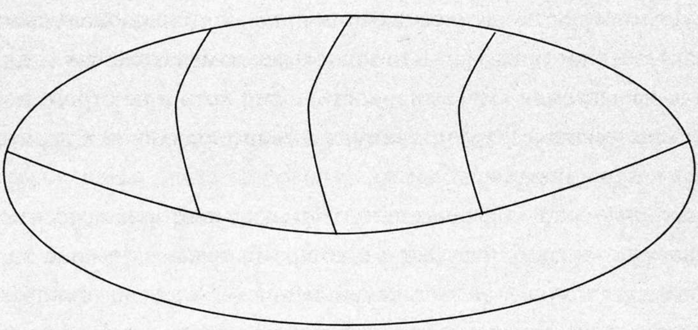
НОЛЬ — САМОЕ ВАЖНОЕ ЧИСЛО

Краеугольным камнем нашей системы счисления является число ноль. Математик и историк Жорж Ифра писал: «*Без числа ноль и без позиционной системы счисления мы бы никогда не имели ни механизации, ни автоматизированных вычислений*».

Чтобы показать важную роль числа ноль, давайте выполним простое умножение 138 на 570, используя непозиционную систему счисления древних римлян. В этой системе нет цифры ноль; следовательно, мы будем умножать CXXXVIII на DLXX. Даже зная, с чего начать, мы не поняли бы точно, когда нам остановиться. Такие вычисления оказались бы нелегким и бесконечным процессом. А ведь это сравнительно простая операция умножения двух трехзначных чисел. Этот пример показывает, что ключевым свойством современной системы счисления является не просто ее основание (10), но также и то, что значение каждой цифры зависит от ее обозначения (1, 2 и т. д.) и положения относительно других цифр (сравните, например, 12 с 21). Позиционной десятичной системе, таким образом, требуется всего десять цифр для записи любого числа.

Но самым важным является наличие особого символа, обозначающего отсутствие какого-либо количества. Таким образом, чтобы показать, что ничего нет, мы не говорим «нет никакого количества», а говорим «есть нулевое количество». И вместо того, чтобы *ничего* не писать, мы пишем 0. (Современный о-образный символ появился от простой точки, которая использовалась вначале.)

Присвоение значения отсутствию количества означает отождествление несуществования чего-либо с отсутствием чего-либо, что могло бы присутствовать. Это может показаться довольно бессмысленным, но это неразрывно связано с ростом торговли и коммерции, а на протяжении времени и с прогрессом. Например, во многих отношениях европейское Возрождение возникло из ничего — из числа ноль!



Этот иероглиф майя первого века до нашей эры — первое документальное подтверждение использования числа ноль. Однако цивилизация майя использовала непозиционную систему счисления: единица обозначалась точкой, число 5 — линией, число 14 — четырьмя точками и двумя линиями и так далее.

Первые числа, которые использовали люди, называются натуральными (1, 2, 3, 4, 5...). Согласно учению пифагорейцев, самой влиятельной теории в древнегреческой математике, имеющей основополагающее значение и для современной науки, с помощью натуральных чисел можно описать окружающий нас мир. Натуральные числа (а также ноль и целые отрицательные числа) и построенные с их помощью дроби математики называют рациональными числами. Этот термин становится более понятен, если мы заметим, что слово «рациональный» имеет тот же корень, что и слово «ration», которое, в свою очередь, связано со словом «ratio» («отношение»), а именно соотношение двух величин. Число называется рациональным, поскольку является результатом отношения, деления, а не потому, что оно «разумное» — в другом смысле слова «рациональный».

Пифагор и его последователи более 20 веков назад знали, что корень из двух ($\sqrt{2}$) не является рациональным числом. Это число нельзя выразить в виде отношения двух натуральных чисел — как результат деления одного числа на другое. Пифагорейцы думали, что числа являются священными сущностями. Они верили, что все в мире может быть измерено, что все имеет численную природу. Поэтому идея невыразимого числа противоречила самой основе их философии.

Числа, которые не являются рациональными, называются иррациональными. Это довольно обманчивое название просто означает, что такие числа не могут быть выражены в виде отношения двух натуральных чисел. Представим только замешательство пифагорейцев, когда они обнаружили действительно иррациональные величины, которые невозможно точно измерить, например, обычную диагональ в квадрате со стороной, равной единице (это и будет число $\sqrt{2}$). Неудивительно, что они попытались утаить такое неприятное открытие.

Существует много математических отличий между рациональными и иррациональными числами, но, пожалуй, одно из самых замечательных и интуитивно понятных — так называемая «музыкальность». Это хотя и не строго математическое отличие имеет математическую причину, а именно: различие в десятичной записи рациональных и иррациональных чисел.

Десятичные знаки рациональных чисел образуют повторяющуюся последовательность, называемую «периодической», в то время как десятичные знаки иррациональных чисел не повторяются ни с какой закономерностью, они появляются один за другим в непредсказуемом порядке. Однако если каждой цифре мы поставим в соответствие ноту и «сыграем» десятичные знаки рационального числа, мы услышим повторяющуюся мелодию, похожую на мотив песни. С другой стороны, музыка иррациональных чисел представляет собой неприятную какофонию.

ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ ЧИСЛА $\sqrt{2}$

Допустим, что число $\sqrt{2}$ рационально. Это значит, что $\sqrt{2}$ можно выразить в виде дроби:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

где p — целое, а q — натуральное число, причем p и q не имеют общих делителей. Избавляясь от знаменателя и возводя в квадрат, получим:

$$2q^2=p^2.$$

Отсюда следует, что р должно быть четным числом.

Тогда мы можем написать $p = 2r$ и

$$2q^2=4r^2.$$

Разделив обе части на 2, получим:

$$q^2=2r^2,$$

откуда следует, что q также должно быть четным. Так как оба числа p и q четные, они имеют общий делитель, равный 2. Какой бы подход мы ни использовали, в результате всегда получается противоречие. Таким образом, первоначальное предположение, что число $\sqrt{2}$ рационально, неверно.

Определение золотого сечения

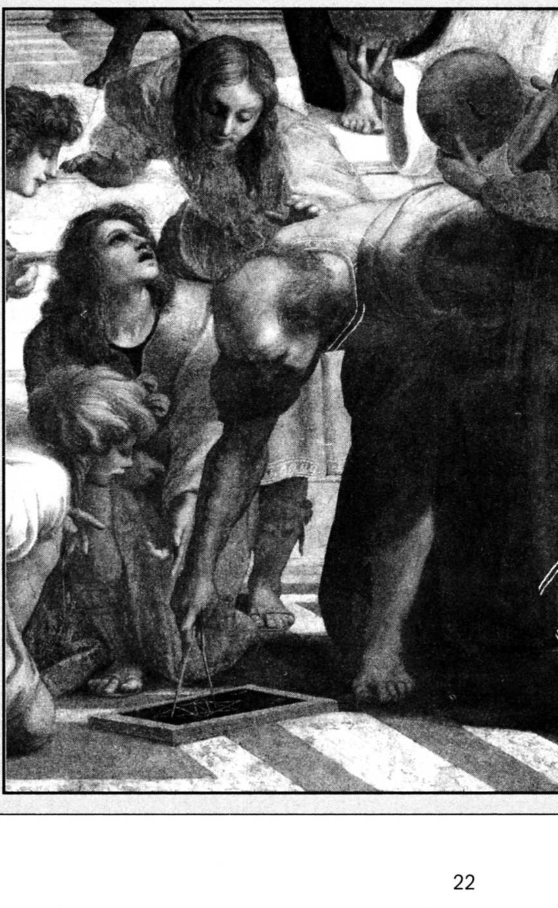
Золотое сечение является иррациональным числом, которое мы будем обозначать греческой буквой *фи* (Ф). Оно было открыто древними греками, и его документированная история начинается с одной из самых известных и много раз переиздаваемых книг всех времен и народов «Начал» Евклида, написанной около 300 г. до н. э.

Шедевр Евклида является первым научным бестселлером в истории. Ученый преследовал две цели, когда писал эту работу. С одной стороны, он хотел собрать все математические результаты того времени и составить энциклопедию, которая служила бы учебником. С другой стороны, он хотел разработать определенную методологию доказательств и построить новую математическую теорию, основанную на аксиомах (утверждениях, принимаемых без доказательств) и законах дедукции.

Успех «Начал» бесспорен, эта книга оказала значительное влияние на развитие всех областей математики. Известный математик и педагог XX века Лусио Ломбардо Радис писал: «*После Библии и работ Ленина* [«*Начала*»] *является самой* *публикуемой и переводимой книгой. Еще несколько десятилетий назад она служила учебником геометрии для средней школы».* Поскольку математика является обязательным предметом всех систем образования во всех странах мира, каждый человек на Земле, ходивший в школу, так или иначе познакомился с «Началами» через тексты учебников математики.

ЕВКЛИД АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ (325-265 гг. до н.э.)

Несмотря на видное место Евклида в истории математики, о его жизни известно мало. Более того, его часто путают с другим Евклидом (из Мегары). Евклид Александрийский родился около 325 г. до н. э. и, по имеющимся данным, уже в возрасте 25 лет стал директором математического отдела музея Александрии. Это заведение было «прибежищем муз» и было больше похоже на библиотеку и колледж, чем на достопримечательность. Действительно, это был крупный научный центр в средиземноморском мире, где хранились копии всех основных научных трудов того времени. Считается, что Евклид получил образование в Афинах, и его работы признавались исключительными даже до его смерти в 265 г. до н. э. Его влияние не ослабевало на протяжении столетий, и даже коллектив математиков 1930-х гг., известный как Бурбаки, пропагандируя радикальные изменения в математике, выбрал наиболее привлекающий внимание лозунг «Долой Евклида!»



Фрагмент фрески «Афинская школа» работы Рафаэля. Художник изобразил Евклида с лицом архитектора Браманте и с циркулем в руке.

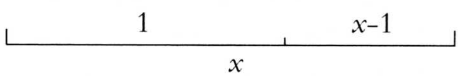
«Начала» состоят из 13 книг. Первые шесть посвящены элементарной геометрии, книги с седьмой по десятую — вопросам чисел, а с одиннадцатой по тринадцатую — стереометрии. Шестая книга содержит текст, с которого началась история золотого сечения:

«Разделить прямую линию в крайнем и среднем отношении значит разделить ее на два таких отрезка, чтобы отношение всей линии к большему отрезку равнялось отношению большего отрезка к меньшему».

Или, выражаясь более кратко: «*Целое относится к большей части, как большая часть к меньшей*». (Первый английский перевод работ Евклида был сделан в 1570 г. Генри Биллингсли, ставшим вскоре лорд-мэром Лондона.)

Крайнее и среднее отношение, которое прозвучало так ненавязчиво, что его нетрудно упустить из вида, является тем самым числом, которое впоследствии стало известно как золотое сечение и которому в 1509 г. Лука Пачоли посвятил целый трактат под названием «О божественной пропорции». Современное обозначение золотого сечения *фи*, Ф, появилось значительно позже, в начале XX века, когда американец Марк Барр предложил использовать первую букву имени Фидий, архитектора Парфенона в Афинах.

Теперь, когда мы рассказали историю золотого сечения и определили его как иррациональное число, мы можем наконец начать изучение его математических свойств. Прежде всего, посчитаем значение числа Ф.



Разделим отрезок на две части, тогда он будет разделен в крайнем и среднем отношении в терминах Евклида, иначе говоря, в «золотом» отношении, если $\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$.

Если дроби равны, то равны и соответствующие произведения по правилу «крест-накрест»: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$. Это приводит нас к квадратному уравнению:

$$x\cdot(x-1)=1\cdot 1 \rightarrow x^2-x=1,$$

которое эквивалентно уравнению $$x^2-x-1=0. \qquad (1)$$

У этого уравнения есть два решения. Нас интересует лишь положительное:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618.$$

Это и есть искомое число, которое мы обозначим Ф:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618.$$

Так как решение уравнения (1) является отношением между длинами частей отрезка, оно не зависит от длины самого отрезка. Другими словами, значение золотого сечения не зависит от первоначальной длины.

Так как выражение содержит квадратный корень, число Ф будет иррациональным числом. Это значит, что мы не можем записать его в виде конечного десятичного числа. Более того, бесконечная строка десятичных знаков не содержит периодически повторяющихся групп цифр. Число Ф, таким образом, является непериодическим десятичным числом, которое невозможно вычислить до конца. Более точное вычисление числа Ф не имеет смысла, потому что оно особенно важно в геометрическом виде, а не в числовом. Достаточно сказать, что Ф = 1,6180339887498 94, потому что 15 знаков после запятой вполне достаточно для любых возможных расчетов.

Теперь возьмем калькулятор и сделаем несколько простых расчетов, взяв приближенное значение Ф с точностью до пяти десятичных знаков: Ф = 1,61803.

Сначала разделим единицу на Ф. Что мы получим? Число 0,61803; те же самые десятичные знаки после запятой. Оказывается, что 1/Ф = Ф – 1.

БОЛЕЕ ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ Φ

Для любителей точности мы приводим значение золотого сечения с 99 знаками после запятой!

1,61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544
86227052604628189024497072072041893911374847540880753868917521
26633862223536931793180060766726354433389086595939582905638322
66131992829026788067520876689250171169620703222104321626954862
62963136144381497587012203408058879544547492461856953648644492
41044320771344947049565846788509874339442212544877066478091588
46074998871240076521705751797883416625624940758906970400028121
04276217711177780531531714101170466659914669798731761356006708
74807101317952368942752194843530567830022878569978297783478458
78228911097625003026961561700250464338243776486102838312683303
72429267526311653392473167111211588186385133162038400522216579
12866752946549068113171599343235973494985090409476213222981017
26107059611645629909816290555208524790352406020172799747175342
77759277862561943208275051312181562855122248093947123414517022
37358057727861600868838295230459264787801788992199027077690389
53219681986151437803149974110692608867429622675756052317277752
0353613936.

Теперь давайте возведем наше число в квадрат (Φ^2). С учетом приближенного значения получаем, что $\Phi^2 = \Phi + 1$. Является ли это просто случайностью? Мы сейчас покажем, что это вовсе не совпадение.

Основные свойства золотого сечения

Для начала вспомним, что Φ является решением уравнения:

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{1}$$

Мы только что проверили это с приближенным значением, показав, что

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1. \tag{2}$$

Начиная с уравнения (2), несколько раз умножим обе части на Ф и получим:

$$\begin{aligned} &\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi \\ &\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 \\ &\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Мы видим, что *любая степень Ф равна сумме двух предыдущих степеней.* В результате, имея значения Ф и Φ^2, нам не нужно выполнять операции умножения для получения других степеней Ф, достаточно сложить две последовательных степени, чтобы получить следующую.

Аналогично, используя выражения (2) и (3), мы можем найти другие соотношения между степенями Ф, которые содержат только само значение Ф и натуральные числа.

$$\begin{aligned} &\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1 \\ &\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2 \\ &\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3 \\ &\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = 8\Phi + 5 \\ &\Phi^7 = \Phi^6 + \Phi^5 = 13\Phi + 8 \\ &\Phi^8 = \Phi^7 + \Phi^6 = 21\Phi + 13 \\ &\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Мы видим, что для получения любой степени Ф достаточно умножить число Ф на сумму двух натуральных чисел из выражения для предыдущей степени Ф, а затем добавить коэффициент при Ф из предыдущего выражения. (Коэффициент — это множитель в математическом выражении.) Например, в выражении для Φ^6 число 8, коэффициент при Ф, является суммой 5 и 3, которые содержатся в выражении для Φ^5, а слагаемое 5 является коэффициентом при Ф для той же степени Φ^5.

Запомним эти свойства, выражаемые формулами (3) и (4), они нам потребуются, когда мы будем использовать последовательность Фибоначчи для получения приближенного значения Ф. Но более подробно об этом будет рассказано позже. Левая часть выражения (3) также показывает, что мы можем построить геометрическую прогрессию из Ф, складывая его две последовательных степени.

Вычислим теперь значение 1/Ф, чтобы проверить, случаен ли был результат, который мы получили с приближенным значением Ф. Начнем с выражения (2), определяющего Ф:

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА

Числа, которые являются решением полиномиального уравнения (содержащего более двух членов) с целочисленными коэффициентами, называются алгебраическими числами. Примерами алгебраических чисел являются $\sqrt{2}$, решение уравнения $x^2 - 2 = 0$, и золотое сечение, Ф, решение уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

Числа, которые не являются решением полиномиального уравнения — т.е. не алгебраические — называются *трансцендентными* числами. Так как существует бесконечное число полиномиальных уравнений, можно подумать, что почти все числа являются алгебраическими. Но это не так трансцендентных чисел намного больше, чем алгебраических.

Доказать, что число трансцендентное, не так просто, так как существует бесконечное число уравнений, все их невозможно перебрать для доказательства. Невозможно предъявить решения каждого уравнения! Два самых известных трансцендентных числа — это *e* и π. Трансцендентность первого была доказана французским математиком Шарлем Эрмитом в 1873 г. И хотя это было известно много веков назад, лишь в 1882 г. немецким математиком Фердинандом фон Линдеманом было представлено доказательство трансцендентности числа π.

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^2 - \Phi = 1.$$

Разделим все члены этого уравнения на Ф:

$$(\Phi^2 - \Phi) / \Phi = 1 / \Phi$$
$$\Phi - 1 = 1 / \Phi.$$

Это удивительное свойство открывает нам новые возможности. С помощью этого простого упражнения мы видим, что число Ф, несмотря на свое скромное определение, ведет нас к замечательным открытиям. Оно появляется в самых различных областях математики, а также имеет далеко идущие свойства.

Проиллюстрируем это, найдя значение следующей последовательности квадратных корней:

$$A = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}} \qquad (5)$$

Добавляя по одному корню из единицы, мы получим последовательность приближенных значений числа А.

$$\sqrt{1+\sqrt{1}} = 1{,}4142.$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = 1{,}5538.$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} = 1{,}5931.$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}} = 1{,}6119.$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}} = 1{,}6161.$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}} = 1{,}6174.$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}} = 1{,}6178.$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}}} = 1{,}6180.$$

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Для математика термин «последовательность» означает неограниченный набор упорядоченных чисел, построенный по определенному правилу. Члены последовательности обычно обозначаются буквой с нижним индексом, который указывает на занимаемое в последовательности место: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots = \{a_n\}$.

Два примера последовательностей: четные числа $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} = \{2n\}$, и квадраты чисел $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\} = \{n^2\}$. Другим примером являются геометрические прогрессии, в которых каждый член равен предыдущему, умноженному на постоянное число, называемое *знаменателем* прогрессии. Иными словами, отношение двух последовательных членов является числом постоянным. Многие последовательности имеют выражение, которое позволяет нам найти значение каждого члена в зависимости от позиции, которую он занимает. Зная этот общий член, мы можем определить последовательность и найти все ее члены. В случае геометрической прогрессии, где первый член a_1 и знаменатель r, общий член выражается как $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. Последовательность можно определить также с помощью так называемого *рекуррентного соотношения*, которое позволяет получить значение члена последовательности, зная предыдущие члены. Конечно, удобнее работать с общим членом, но записать для каждой последовательности формулу общего члена не всегда возможно или не так просто.

Далее, даже при добавлении дополнительных членов, результаты будут колебаться около значения 1,618, что, по сути, является значением Ф. Снова мы совершенно неожиданно нашли новый способ получения приближенного значения Ф. Хотя мы должны это доказать.

Возводя выражение (5) в квадрат, получим:

$$A^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+....}}}} = 1+A.$$

Это равносильно уравнению $A^2 - A - 1 = 0$.

Это же самое уравнение определяет Ф. Следовательно, мы нашли еще один способ выразить значение золотого сечения:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$$

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

На протяжении долгого времени самым распространенным способом нахождения приближенного значения были цепные дроби: выражения следующего вида, в которых значения a_i являются целыми числами:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + ...}}}$$

Для удобства обозначения цепные дроби, как правило, записываются в виде $[a_1, a_2, a_3, a_4, ...]$, если числа a_1 и a_2 периодически повторяются, то дробь записывается как $\left[\overline{a_1,\ a_2}\right]$.

Для рациональных чисел соответствующие цепные дроби конечны. Например:

$$\frac{37}{11} = 3+\frac{4}{11} = 3+\cfrac{1}{\frac{11}{4}} = 3+\cfrac{1}{2+\frac{3}{4}} = 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{4}{3}}} = 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}} = [3, 2, 1, 3].$$

Любое иррациональное число, которое содержит квадратный корень, также может быть выражено в виде цепной дроби. Решение уравнения $x^2 - bx - 1 = 0$ может быть выражено цепной дробью с периодом b.

$$b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+...}}} = [b, b, b, b, ...] = \left[\overline{b}\right].$$

МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Мы видели, что золотое сечение является положительным корнем квадратного уравнения. Этот подход был обобщен, что дало возможность определить подобные числа, которые образуют семейство так называемых металлических сечений. Наряду с золотым сечением Φ существуют другие сечения: серебряное, бронзовое, медное... Все они аналогичны Φ в смысле геометрических построений и предела отношений чисел последовательности. Металлические отношения всегда определяются алгебраически как положительные решения квадратных уравнений

$$x^2 - px - q = 0,$$

где p и q — натуральные числа, которые приводят к различным сечениям из семейства металлических сечений. Если взять $p = 2$ и $q = 1$, то положительным решением уравнения будет число $1+\sqrt{2} \cong 2,414213562373095048.$ Оно называется серебряным сечением.

Если взять $p = 3$ и $q = 1$, то положительное решение уравнения $\frac{3+\sqrt{13}}{2} \cong 3,30277563773199464...$ дает нам бронзовое сечение.

Аналогия между металлическими сечениями, пожалуй, лучше всего видна, когда они выражены в виде цепных дробей. Мы уже знаем, что $\Phi = [\bar{1}]$. Оказывается, серебряное сечение $= [\bar{2}]$, а бронзовое сечение $= [\bar{3}]$.

Используя цепные дроби для нахождения приближенного значения Φ, мы получим следующее выражение:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}} = [1,1,1,1,...] = [\bar{1}]. \qquad (6)$$

Мы знаем, что это верно, потому что мы можем записать (6) в виде:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\left(\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}\right)} = 1 + \frac{1}{\Phi} \rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Таким образом, мы нашли еще два способа выражения Ф (5) и (6). В настоящее время простота компьютерных расчетов снизила важность этих способов, но на протяжении долгого времени эти подходы всегда упоминались в классической литературе. Даже сегодня эти методы хороши для умственной разминки и требуют лишь карманного калькулятора.

Последовательность Фибоначчи

История математики полна неожиданностей. Одна из них касается золотого сечения, известного еще с древних времен и тесно связанного с геометрией. Однако спустя столетия это соотношение было найдено в ряде дробей, возникших из чисто арифметической последовательности. Гением, нашедшим эту связь между геометрией и арифметикой, был один из самых выдающихся математиков средневековья Леонардо Пизанский, более известный как Фибоначчи.

Фибоначчи написал труды по геометрии, алгебре и теории чисел, но его самая знаменитая книга посвящена вычислениям. Liber Abaci («Книга абака»), опублико-

ЛЕОНАРДО ПИЗАНСКИЙ — ФИБОНАЧЧИ (1170—1250)

Леонардо Пизанский родился в Пизе около 1170 г. Он более известен под прозвищем «сын Благонамеренного» (по-итальянски figlio di Bonacci). Тем не менее, это лишь одна из версий происхождения его псевдонима. Не существует никаких доказательств, что он при жизни был известен как Фибоначчи. Ученый пришел в математику из торговли (его отец был купцом с международными связями). Однако вскоре интерес Фибоначчи к математике вышел далеко за рамки торговли. Деловые поездки в Северную Африку дали ему возможность познакомиться с математическими работами мусульманских ученых, а именно, с индо-арабской системой счисления, заимствованной из Азии. Он сразу понял огромные преимущества этой системы над римскими цифрами. Фибоначчи стал ее убежденным сторонником и начал распространять ее по всей Европе. Именно благодаря прежде всего Фибоначчи западная культура сделала этот важный шаг вперед.

ванная в 1202 г., имеет обманчивое название (буквальное значение слова «абак» — «счетная доска»), возможно, намеренно ироничное, потому что в действительности она пытается продемонстрировать преимущества арабских цифр для вычислений перед методами, основанными на применении счётов и римских цифр, которые доминировали в то время в Италии. Книга Фибоначчи положила конец этой практике, но это произошло не сразу. Несмотря на то, что с помощью десятичных чисел проще было делать расчеты, новый метод распространялся не так быстро. Необходимо было преодолеть всякого рода сопротивление, прежде всего со стороны абацистов, счетоводов, которые на протяжении веков использовали счеты. Тем не менее, в конце концов алгористы, сторонники арабских цифр, победили.

Гравюра 1504 г. из энциклопедии Margarita Philosophica Грегора Рейша иллюстрирует спор между абацистами (справа) и алгористами (слева). Из рисунка видно, что даже через три века после Фибоначчи спор о системах счисления был все еще в разгаре.

Наряду с введением новых символов и методов расчета «Книга абака» была посвящена теории чисел (например, разложению на простые множители и правилам делимости) и содержала первоклассные алгебраические задачи. Конечно, она содержала главы о ведении счетов, о распределении прибыли и убытков, а также об обмене денег. Но самым известным разделом книги является знаменитая задача о размножении кроликов, решение которой известно сегодня как последовательность Фибоначчи.

Задача формулируется следующим образом: «Сколько пар кроликов будет у нас через год, если в январе у нас была одна пара, которая каждый месяц производит на свет другую пару, начиная с марта пара, в свою очередь, производит собственное потомство каждый месяц, начиная со второго месяца».

Для решения этой задачи Фибоначчи, как истинный бизнесмен, составил таблицу. В ней он записал рост популяции кроликов и подсчитал в столбце «Итого» число пар в конце каждого месяца. Беглый взгляд на этот столбец показывает странную закономерность в последовательности: каждое число является суммой двух предыдущих.

поколение / месяц	первое	второе	третье	четвертое	пятое	шестое	Итого
январь	1						1
февраль	1						1
март	1	1					2
апрель	1	2					3
май	1	3	1				5
июнь	1	4	3				8
июль	1	5	6	1			13
август	1	6	10	4			21
сентябрь	1	7	15	10	1		34
октябрь	1	8	21	20	5		55
ноябрь	1	9	28	35	15	1	89
декабрь	1	10	36	56	35	6	144

Числа в столбце «Итого» образуют так называемую последовательность Фибоначчи, согласно рекуррентному соотношению:

$$a_1 = 1, a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 2).$$

Теперь посмотрим на связь между этой последовательностью и золотым сечением. Вспомним выражения (4) для степеней Φ на стр. 26, запишем их здесь в окончательной форме:

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$
$$\Phi^5 = 5\Phi + 3$$
$$\Phi^6 = 8\Phi + 5$$
$$\Phi^7 = 13\Phi + 8$$
$$\Phi^8 = 21\Phi + 13$$

....

Если мы обратим внимание на коэффициенты в правых частях этих выражений, то увидим, что они являются последовательными членами последовательности Фибоначчи. Мы используем это для выражения n-й степени золотого сечения, где a_n является n-м членом последовательности Фибоначчи:

$$\Phi^n = a_n \Phi + a_{n-1}.$$

Теперь рассмотрим некоторые другие связи между этими двумя понятиями. Воспользуемся калькулятором, чтобы найти отношения соседних чисел в последователь-

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Мы говорим, что число A является пределом последовательности $\{a_n\}$, если члены последовательности сходятся к A — то есть для достаточно большого номера n все следующие члены последовательности a_n приближаются к одному и тому же числу.

Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ имеет предел 0.

(Дробь $1/n$ с ростом n все более приближается к 0.)

Последовательность $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ имеет предел 2. Однако не все последовательности имеют пределы.

ности Фибоначчи: a_n / a_{n-1}. Первые несколько результатов имеют мало общего с Ф, но мы продолжим вычисления. Что мы видим? Ответы вдруг начинают приближаться к значению Ф. В следующей таблице видно, что, начиная с десятого члена, каждое частное отличается от предыдущего менее чем на 0,001.

позиция	число	a_n/a_{n-1}	отличие от Ф
1	1		
2	1	1,000000000000000	-0,618033988749895
3	2	2,000000000000000	+0,381966011250105
4	3	1,500000000000000	-0,118033988749895
5	5	1,666666666666667	+0,048632677916772
6	8	1,600000000000000	-0,018033988749895
7	13	1,625000000000000	+0,006966011250105
8	21	1,615384615384615	-0,002649373365279
9	34	1,619047619047619	+0,001013630297724
10	55	1,617647058823529	-0,000386929926365
11	89	1,618181818181818	+0,000147829431923
12	144	1,617977528089888	-0,000056460660007
13	233	1,618055555555556	+0,000021566805661
14	377	1,618025751072961	-0,000008237676933
15	610	1,618037135278515	+0,000003146528620
16	987	1,618032786885246	-0,000001201864649
17	1,597	1,618034447821682	+0,000000459071787
18	2,584	1,618033813400125	-0,000000175349770
19	4,181	1,618034055727554	+0,000000066977659
20	6,765	1,618033963166707	-0,000000025583188

Таким образом, для нахождения приближенного значения Ф нет необходимости извлекать квадратные корни, достаточно просто делить друг на друга члены последовательности Фибоначчи.

Как всегда в случае с золотым сечением, все эти доказательства указывают на определенный общий результат: предел отношений членов последовательности Фибоначчи равен Ф.

Докажем это. Допустим сначала, что предел отношений членов последовательности Фибоначчи, а именно предел последовательности a_{n+1} / a_n равен некоторому числу L. Запишем это следующим образом:

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}) = 1 + \lim \frac{a_{n-1}}{a_n} =$$

$$1 + \lim \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\lim \frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{L}.$$

(Напомним, что $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.)

Тогда

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$
$$L^2 = L + 1$$
$$L^2 - L - 1 = 0$$
$$L = \Phi.$$

Число L описывается тем же уравнением, что и Φ, поэтому L и Φ должны иметь одинаковое значение. Таким образом, золотое сечение является пределом последовательности отношений чисел Фибоначчи.

Последовательность Фибоначчи начинается с двух единиц. Если вместо этого мы начнем последовательность с любых других равных чисел и построим остальные члены по тому же правилу (каждое число является суммой двух предыдущих), то предел отношений членов такой последовательности всегда будет равен Φ. Заметим, что в приведенном выше доказательстве мы использовали только это условие:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Удивительные числа

Как мы видели, последовательность Фибоначчи позволяет найти приближенное значение числа Φ с любой точностью, вычисляя отношения ее членов. Однако последовательность имеет гораздо больше применений, чем предсказание роста численности популяции кроликов, и она неожиданно появляется в работах других математических гениев. Давайте рассмотрим некоторые из замечательных свойств последовательности Фибоначчи.

Сумма членов последовательности Фибоначчи

Если выбрать любые 10 соседних чисел из последовательности Фибоначчи и сложить их вместе, всегда получится число, кратное 11. Например, общая сумма первых 10 членов равна:

$$1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143=11\cdot 13.$$

То же самое справедливо и для:

$$21+34+55+89+144+233+377+610+987+1\,597=4\,147=11\cdot 377.$$

Но это еще не все. Каждая сумма равна числу 11, умноженному на седьмой член взятой подпоследовательности: 13 в первом случае и 377 во втором.

А вот еще один сюрприз. Для любого n сумма первых n членов последовательности всегда будет равна разности $(n+2)$-го и первого члена последовательности. Мы видим это в случае первых десяти членов, сумма которых равна 143. Это и есть разность двенадцатого члена (144) и первого (1). В случае первых 17 членов общая сумма составляет 4180, что равно девятнадцатому члену a_{19} (4181) минус 1.

Этот факт выражается следующей формулой:

$$1+1+2+3+5+\ldots\, a_n=a_{n+2}-1.$$

Мы можем использовать этот факт для нахождения суммы любого количества последовательных членов, что для непосвященных выглядит как магия. Например, выберем любые два числа, скажем, 25 и 40, и подставим их в нашу формулу вместо n:

$$1+1+2+3+5+\ldots\, a_{40}=a_{42}-1;$$

$$1+1+2+3+5+\ldots\, a_{25}=a_{27}-1.$$

Чтобы посчитать сумму всех членов между a_{25} и a_{40} (от a_{26} до a_{40} включительно), мы просто найдем разность между этими двумя выражениями:

$$a_{26}+\ldots+a_{40}=a_{42}-a_{27}.$$

Теперь в нашем распоряжении имеется следующий трюк: чтобы найти сумму всех членов последовательности между двумя данными членами (не включая первый, но включая второй член), достаточно найти разность соответствующих $(n+2)$-х членов.

МАРИО МЕРЦ (1925–2003)

Итальянский художник Марио Мерц, один из самых выдающихся представителей направления «арте повера», неоднократно использовал последовательность Фибоначчи во многих своих работах 1970-х гг., применяя целый ряд различных материалов (неоновые огни, ветки, шкуры животных, газеты). Так как числа Фибоначчи стремятся к бесконечности, потому что каждый следующий член равен сумме двух предыдущих, Мерц использовал это свойство знаменитой последовательности в качестве символа прогресса искусства и общества. Каждый шаг цивилизации — это сумма прошлых событий, в результате чего прошлое является неотъемлемой и важной частью будущего. Аналогично, современное искусство представляет собой сумму предшествующих искусств, ничто не может быть создано из ничего.

Работу Марио Мерца, изображающую последовательность Фибоначчи в виде спирали, можно увидеть на станции метро города Неаполя.

Пифагоровы тройки

Существует бесконечное число пифагоровых троек, однако их нелегко найти. Но, как вы уже догадались, последовательность Фибоначчи позволяет найти пифагоровы тройки. Мы расскажем об этом в данном параграфе, но сначала покажем, какая существует связь между Фибоначчи, Пифагором и золотым сечением.

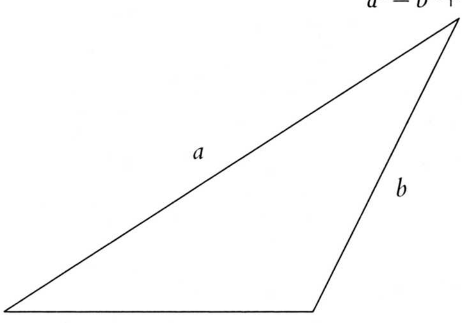
Самым известным свидетельством математического гения человечества является теорема Пифагора: в любом прямоугольном треугольнике квадрат длины большей стороны (гипотенузы) равен сумме квадратов длин двух других сторон (называемых катетами).

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

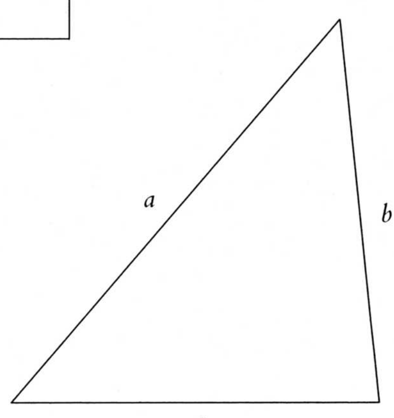
С геометрической точки зрения мы можем рассматривать все стороны прямоугольного треугольника как стороны трех построенных на них квадратов. Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны (квадрат имеет равные стороны). Теорема Пифагора просто говорит, что общая площадь квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника (сумма площадей двух квадратов), равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Эта формула позволяет нам определить тип треугольника, не измеряя его углов. Все, что нам нужно сделать, — это найти квадраты длин трех сторон и сравнить квадрат длины большей стороны с суммой квадратов длин двух других сторон. В случае равенства мы имеем прямоугольный треугольник. Если квадрат длины большей стороны больше, то треугольник является тупоугольным (наибольший угол больше 90°). Если сумма квадратов больше, то треугольник является остроугольным (все три угла меньше 90°).

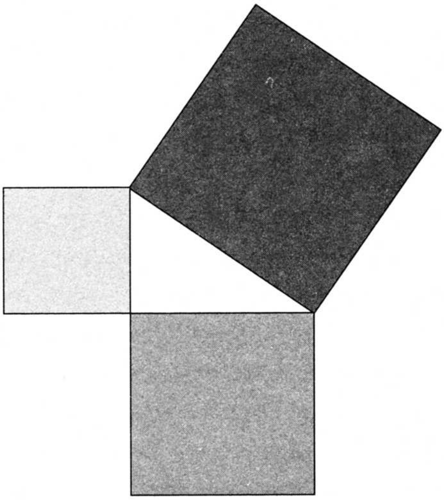
$a^2 = b^2 + c^2$



$a^2 > b^2 + c^2$



$a^2 < b^2 + c^2$



Если мы построим квадрат на каждой стороне прямоугольного треугольника, то количество бумаги, необходимое для того, чтобы покрыть больший квадрат, будет таким же, как и количество бумаги, необходимое для покрытия двух меньших квадратов.

Если длины сторон прямоугольного треугольника являются целыми числами, то они образуют группу из трех чисел, называемых пифагоровыми тройками. Другими словами, пифагорова тройка — это три целых числа (a, b, c), удовлетворяющих условию:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Теперь мы продемонстрируем метод нахождения пифагоровых троек с помощью последовательности Фибоначчи. Возьмем любые четыре последовательных числа из последовательности, например, 2, 3, 5 и 8, и построим еще три числа следующим образом:

1. Произведение двух крайних чисел: $2 \cdot 8 = 16$;
2. Удвоенное произведение двух чисел в середине: $2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$;
3. Сумма квадратов двух чисел в середине: $3^2 + 5^2 = 34$.

Мы можем легко убедиться, что эти три числа (34, 30, 16) образуют пифагорову тройку:

$$16^2 = 256; \quad 30^2 = 900; \quad 34^2 = 1\,156 \Rightarrow 256 + 900 = 1\,156.$$

Этот метод работает в любом случае для любых четырех последовательных чисел из последовательности Фибоначчи.

ЗНАЧЕНИЕ И РОЛЬ ПИФАГОРОВЫХ ТРОЕК

Самая известная пифагорова тройка — из наименьшего прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами — это (5, 4, 3). Эти числа удовлетворяют соотношению:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

На протяжении многих веков эта тройка использовалась в виде веревки с узелками, отмечающими три длины. На некоторых изображениях, сохранившихся со времен Древнего Египта, можно видеть людей, несущих моток такой веревки с узлами. Как они ее использовали? Считается, что веревка раскладывалась на земле в форме треугольника, а узлы использовались для разметки углов. Получалась фигура, стороны которой были пропорциональны 3, 4 и 5. Таким образом строился прямоугольный треугольник.

Веревки с узлами являлись быстрым способом построения прямого угла (90°). В Египте веревки с узлами использовались для построения перпендикулярных линий при разметке прямоугольных полей вдоль илистых берегов Нила. Эти отметки каждый год смывали паводковые воды. Также эти веревки использовались при обработке камня для египетских пирамид. В сущности, в виде этих простых веревок математика применялась во всех случаях жизни.

Соотношения между числами в последовательности Фибоначчи

Три последовательных числа в последовательности Фибоначчи ведут себя предсказуемым образом. Выберем три любых последовательных числа и перемножим два крайних. Затем сравним результат с квадратом среднего числа. Разница всегда будет одинаковая, на единицу больше или меньше в зависимости от выбора чисел. Например, для чисел 3, 5 и 8 имеем $3 \cdot 8 = 5^2 - 1$, а для чисел 5, 8 и 13 получим $5 \cdot 13 = 8^2 + 1$.

В общем случае это соотношение между числами в последовательности Фибоначчи записывается так:

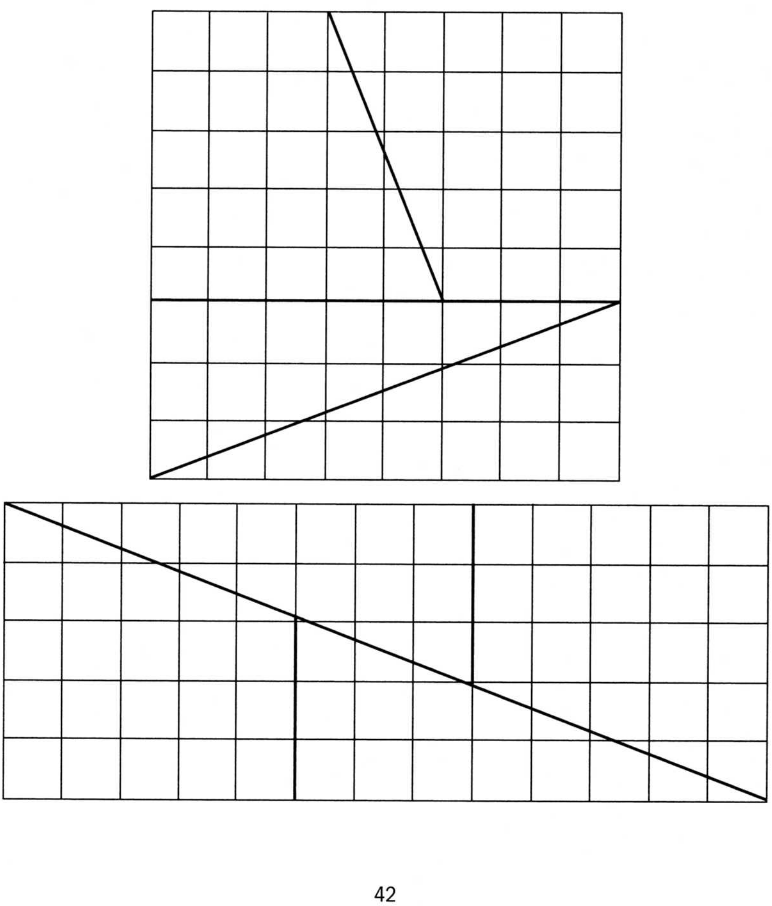
$$a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

Если мы применим это свойство геометрически, мы обнаружим нечто странное. Нарисуем квадратную решетку 8 на 8 (она будет содержать $8^2 = 64$ маленьких квадрата). Затем разделим большой квадрат на четыре части, как показано на рисунке на следующей странице. Далее мы переставим части, словно детали головоломки, и построим из них прямоугольник со сторонами 5 и 13. Но тогда он будет содержать

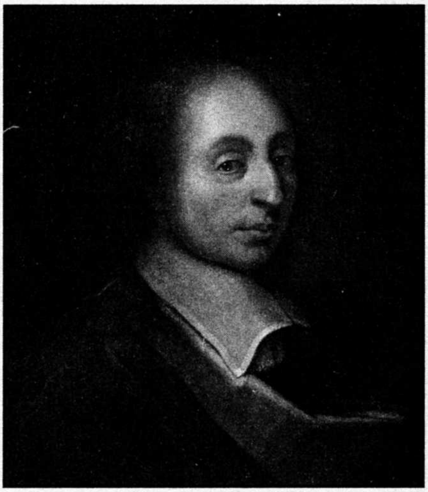
ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ И ТЕОРЕМА ФЕРМА

Теорема Ферма является одной из самых знаменитых математических проблем в истории. На протяжении более 350 лет эта теорема была самой мучительной математической загадкой, и лишь в 1995 г. британский ученый Эндрю Уайлс доказал ее. Теорема Ферма имеет прямую связь с Пифагором и его тройками. Теорема берет уравнение пифагоровой тройки $a^2 = b^2 + c^2$ и утверждает, что для любых целых показателей степеней, больших 2, невозможно найти такие целые числа *a*, *b*, *c*, чтобы выполнялось это равенство. То есть не существует такой тройки целых чисел *a*, *b*, *c*, что $a^n = b^n + c^n$ при $n > 2$.

$13 \cdot 5 = 65$ маленьких квадратов! Откуда взялся дополнительный квадрат? Чтобы разобраться в этой загадке, мы должны посмотреть на углы, образуемые линиями, которыми мы разделили наш квадрат. Они не совсем равны, и когда мы строим



БЛЕЗ ПАСКАЛЬ (1623–1662)



Француз Блез Паскаль применял свои феноменальные способности во многих областях науки. В 1654 г. с ним произошел несчастный случай, когда он ехал в коляске, запряженной лошадью. Физически он не пострадал, но инцидент имел для него психологические последствия. Паскаль отдалился от светского общества и нашел убежище в религии, посвятив себя философии и теологии. Он был замечательным писателем и внес важный вклад в физику, занимаясь мало изученными в то время вопросами об атмосферном давлении и вакууме. Он является изобретателем гидравлического пресса и шприца. Он также изобрел механический калькулятор (различные варианты вычислительной машины, называемой «паскалина»). Однако его наиболее важный вклад в науку связан с математикой, в частности, с теорией вероятностей.

Паскаль заметил, что биномиальные коэффициенты в разложении различных степеней выражения $(a + b)^n$ можно расположить в виде треугольника чисел. Этот треугольник носит теперь его имя (см. стр. 44).

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Коэффициентами данного разложения являются числа 1, 4, 6, 4, 1, которые соответствуют пятой строке треугольника Паскаля.

из кусочков новую фигуру, они не образуют идеальный прямоугольник, оставляя крошечные зазоры. Эти небольшие зазоры в сумме дают дополнительную единицу площади, которая, казалось бы, появилась ниоткуда.

Общий член последовательности Фибоначчи

Фибоначчи определил свою последовательность с помощью рекуррентного соотношения. Формула общего члена последовательности была обнаружена в 1843 г. французским математиком Жаком Бине:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(-1\right)^{n+1}\Phi^n + \frac{1}{\Phi^n}\right].$$

Эта формула показывает, что предел отношений соседних членов последовательности Фибоначчи равен золотому сечению.

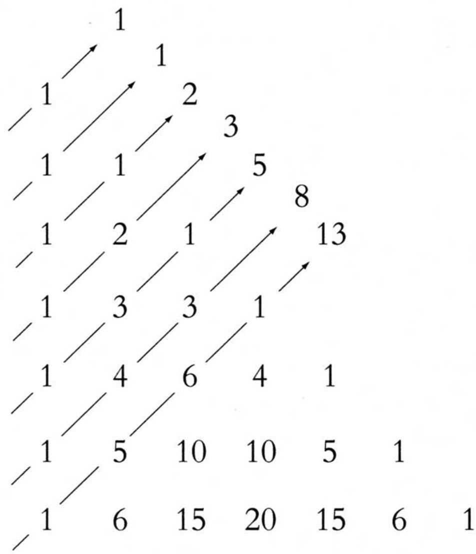
Треугольник Паскаля и последовательность Фибоначчи

Треугольник Паскаля является одним из самых известных численных правил. Паскаль использовал его для разложения бинома Ньютона, но это правило уже было известно китайским ученым, а также персидскому математику XII в. Омару Хайяму.

Треугольник Паскаля строится следующим образом: в первом ряду (в нулевой строке) стоит цифра 1. Каждая следующая строка имеет на одно число больше, чем предыдущая, каждое новое число получается путем сложения двух чисел слева и справа над ним (там, где слева или справа числа нет, используется значение 0). Это определение подчеркивает связь треугольника Паскаля с последовательностью Фибоначчи, которая определяется аналогичным образом. С такими аналогичными определениями следует ожидать прямые численные соотношения между треугольником Паскаля и последовательностью Фибоначчи. И вот эта связь: надо только написать строки треугольника Паскаля одну под другой, а затем складывать элементы

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

по диагонали (см. диаграмму ниже), чтобы получить последовательность Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8 и т.д.).



Простые числа в последовательности Фибоначчи

Последовательность Фибоначчи наполнена удивительными свойствами. Например, члены последовательности, которые являются простыми числами, могут занимать место, номер которого также является простым числом. Однако обратное не всегда верно. Например, на месте с номером $n = 19$ (простое число) стоит число $a_n = 4\,181 = 37 \cdot 113$ (т.е. не являющееся простым).

Продолжая тему простых чисел в последовательности Фибоначчи, мы можем высказать предположение, которое до сих пор не доказано: последовательность Фибоначчи содержит бесконечное количество простых чисел. В настоящее время неизвестно, является это предположение истинным или ложным.

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Число, которое делится только на себя и на единицу, называется простым. Если число имеет другие делители, кроме этих двух, оно называется составным. Например, числа 7, 13 и 23 – простые; число 32 (делящееся на 2, 4, 8 и 16) является составным. Любое число можно представить в виде произведения простых чисел.

Глава 2

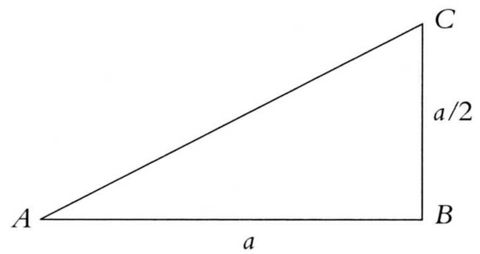
«Золотой» прямоугольник

Из предыдущей главы мы узнали, как традиционно определяется золотое сечение: отрезок прямой линии делится в крайнем и среднем отношении, если длина всего отрезка относится к большей части так, как большая часть — к меньшей. Другими словами, целое относится к большей части как большая часть к меньшей. Теперь давайте посмотрим, как можно использовать крайнее и среднее отношение для деления на части различных фигур.

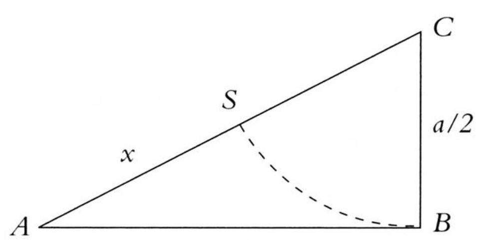
Деление отрезка в крайнем и среднем отношении

Имеется отрезок AB длины a. Мы хотим найти точку X, которая делит отрезок на две части в отношении Φ. Это деление выполняется в три этапа:

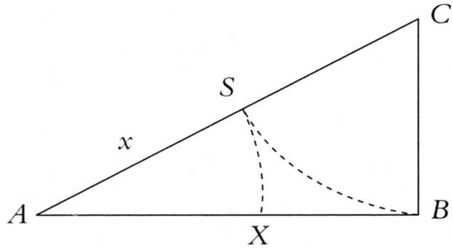
а) построим прямоугольный треугольник с катетами a и $a/2$ (половина длины a);



б) проведем дугу окружности с центром в точке C и радиусом CB (равным $a/2$). Эта дуга пересекает сторону AC в точке S;



в) затем проведем еще одну дугу окружности с центром в точке A и радиусом AS, которая пересекает сторону AB в точке X. Эта точка X удовлетворяет условию $AX = x = AC - (a/2)$ и, следовательно, является искомой точкой. Также мы можем проверить, что выполняется условие $AX/XB = \Phi$.



Этот подход называется методом построения. Почему он дает нам золотое сечение? Точка X будет искомой точкой, если она удовлетворяет условию:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

$$x \cdot x = a \cdot (a-x)$$

$$x^2 = a^2 - ax$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4}. \qquad (1)$$

Используя формулу для квадрата суммы $(s + t)^2 = s^2 + 2st + t^2$, перепишем формулу (1) в виде:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Применяя теорему Пифагора к выражению (2), мы видим, что у прямоугольного треугольника с катетами a и $a/2$ длина гипотенузы равна $(x + a/2)$.

Именно такова длина гипотенузы AC, равная $(x + a/2)$, так как $CS = CB = a/2$, а $AS = x = AX$.

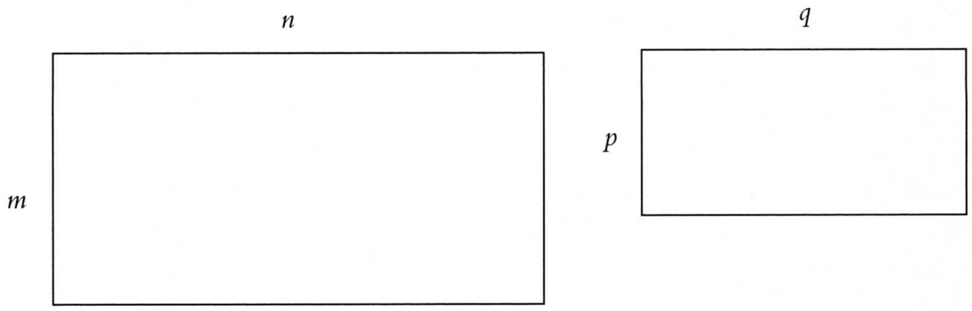
Прямоугольники и золотое сечение

В наши дни большинство людей носит в кошельках и сумочках множество карточек: кредитные карты, визитные карточки, пропуски в библиотеку и в спортзал, а также водительские права и удостоверение личности. Мы пользуемся ими ежедневно, не обращая внимания на тот факт — вовсе не случайный и немаловажный — что большинство карточек имеет одинаковый размер и форму, по крайней мере, те же пропорции.

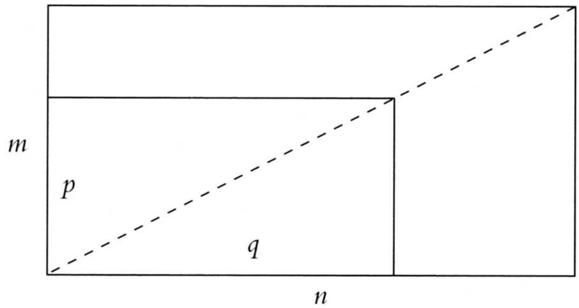
Чтобы убедиться в этом, достаточно измерить и сравнить стороны карточек-прямоугольников. Отношение большей стороны к меньшей в большинстве случаев является числом, очень близким к 1,618, числу Ф. Поэтому не случайно, что это отношение у большинства карт является одним и тем же, это стандартные размеры.

Мы используем отношение сторон для определения типов прямоугольников. Если у двух прямоугольников это число одинаково, мы говорим, что они одного типа. В математических терминах прямоугольники с таким свойством являются подобными прямоугольниками. Таким образом, два прямоугольника со сторонами m, n и p, q (где $m < n$ и $p < q$) будут подобными, если:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}. \qquad (3)$$



Существует очень простой и эффективный способ определить, удовлетворяют ли два прямоугольника этому свойству, без измерения сторон и вычисления отношений, даже без использования карандаша и бумаги. Надо только совместить один угол меньшего прямоугольника с углом большего и продолжить его диагональ. Если продолжение диагонали меньшего прямоугольника является также диагональю большего прямоугольника, то эти прямоугольники подобны.



Прямоугольник характеризуется отношением m/n. Мы назовем это отношение форматным отношением k, так что m/n равно k. Чем меньше отношение m/n, тем более вытянут прямоугольник. С другой стороны, если m и n равны, то мы получим знакомую фигуру — квадрат. Квадрат — это особый тип прямоугольника с форматным отношением 1. Таким образом, не все прямоугольники подобны карточкам в наших кошельках. Еще один пример прямоугольников, не являющихся «золотыми», — это теле- и киноэкраны. Раньше стороны телеэкранов имели отношение 4:3. Постепенное изменение формата в настоящее время привело к новому стандарту: современные широкоэкранные цифровые телевизоры имеют отношение сторон 16:9. В обоих случаях отношение показывает соотношение между длинами сторон. Если смотреть фильм на экранах двух разных типов, можно увидеть, как соотношение между длинами сторон влияет на изображение. На старых телевизорах, например, человеческие фигуры более тонкие, более вытянутые по вертикали, в то время как на широкоэкранных телевизорах герои старых фильмов выглядят более приземистыми. Чем объясняется эта разница, и какое из двух изображений искажено? Простой расчет показывает, что экраны телевизоров не являются подобными прямоугольниками. С математической точки зрения очевидно, что $9/16 \neq 3/4$. Давайте посчитаем: $3/4 = 0{,}75$, а $9/16 = 0{,}5625$. Форматное отношение прямоугольника классического телевизора больше. Широкоэкранные телевизоры искажают изображения старых фильмов по горизонтали, чтобы заполнить вытянутый экран, из-за чего вещи кажутся шире, чем на самом деле.

Противоположный эффект возникает, когда широкоэкранный фильм показывается на экране формата 4:3. Поэтому, как правило, изображение обрезается по краям, чтобы поместиться на такой экран, так что мы теряем не только часть изображения, но и большую часть панорамного эффекта.

ПРЯМОУГОЛЬНИКИ В ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ: ФОРМАТЫ ТЕЛЕВИЗОРОВ

Как известно, размеры телевизоров даются в дюймах (дюйм примерно равен длине ногтевой фаланги большого пальца) и соответствуют длине диагонали экрана. В метрической системе дюйм — это 2,54 см.

В большинстве европейских стран используется метрическая система, поэтому многие европейцы, в том числе студенты, получающие образование с использованием метрической системы, с трудом определяют точный размер телевизора, который они собираются купить. Зная длину диагонали экрана в дюймах и соотношение его сторон, мы можем вычислить точные размеры телевизора в более понятных единицах длины, чтобы избежать неприятных сюрпризов, когда обнаружится, что телевизор не помещается там, где мы хотели его поставить. Телевизор формата 16:9 с экраном в 32 дюйма имеет диагональ 32·2,54 = 81,28 см. Поэтому его реальными размерами являются ширина *9a* и длина *16a*. Теперь, как ни удивительно, одна из древнейших теорем математики поможет нам решить вполне современную проблему. Для нахождения размеров телевизора мы воспользуемся теоремой Пифагора:

$$(9a)^2 + (16a)^2 = 81{,}28^2$$
$$81a^2 + 256a^2 = 337a^2 = 6\,606{,}44$$
$$a^2 = 6\,606{,}44 / 337 \cong 19{,}6$$
$$a = \sqrt{19{,}6} \cong 4{,}43 \text{ см}.$$

Таким образом, размеры экрана 9·4,43 = 40 см и 16·4,43 = 71 см, что составляет 40 x 71 см.

Аналогичные расчеты покажут нам, что телевизор с экраном в 32 дюйма старого формата 4:3 имеет размеры 49 x 65 см. Отсюда следует вывод, выходящий за рамки математики: не так-то легко заменить старый телевизор новой моделью! Хотя и старый, и новый телевизоры имеют диагональ экрана одинаковой длины, скорее всего, новый телевизор не поместится в нише, где стоял старый.

Распознавание и построение «золотого» прямоугольника

Как мы уже говорили, «золотой» прямоугольник имеет соотношение сторон, равное Ф, то есть его форматное отношение равно Ф. Далее мы расскажем, как можно легко строить и распознавать «золотые» прямоугольники.

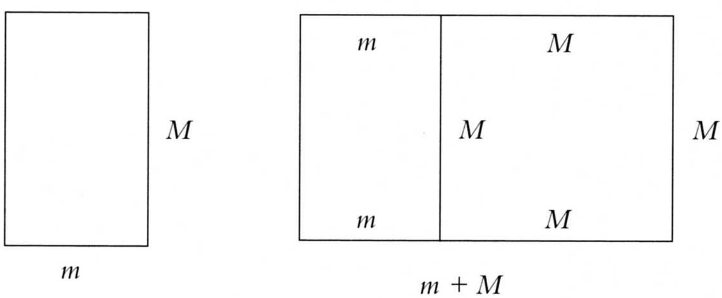
Мы начнем с некоторых свойств «золотых» прямоугольников, которые помогут нам в дальнейшем. Как мы видели, чтобы разделить отрезок AB на две части в отношении Φ, мы должны найти на отрезке точку X, удовлетворяющую условию:

$$AB/AX = AX/XB$$

Обозначим за M длину отрезка AX, а длину отрезка XB — m. Так как длина отрезка AB равна $M + m$, эти значения удовлетворяют следующему условию:

$$(M + m)/M = M/m = \Phi. \qquad (4)$$

Допустим, у нас есть «золотой» прямоугольник, как на следующем рисунке слева. Если мы достроим на его большей стороне равносторонний прямоугольник (т.е. квадрат), мы получим новый прямоугольник со сторонами M и $(m + M)$, как на рисунке справа. Согласно соотношению $(M + m)/M = M/m$, если исходный прямоугольник являлся «золотым» (то есть с условием $M/m = \Phi$), то только что построенный большой прямоугольник также будет «золотым», потому что $(M + m)/M = M/\mathrm{m}$. Этот метод позволяет строить «золотые» прямоугольники большего размера.



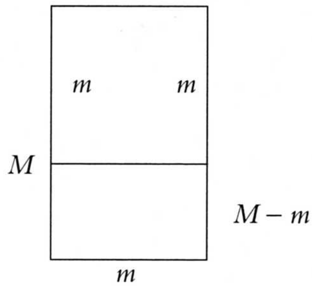
Тот же самый результат мы получим, если от «золотого» прямоугольника отрежем квадрат со стороной, равной меньшей стороне исходного прямоугольника, как на рисунке ниже. Тогда у нас получится прямоугольник со сторонами m и $M - m$. Он, очевидно, меньше, но также будет являться «золотым», если

$$\frac{m}{M-m} = \Phi \leftrightarrow \frac{M-m}{m} = \frac{1}{\Phi}.$$

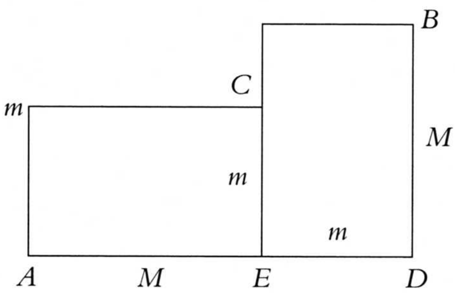
ГНОМОН

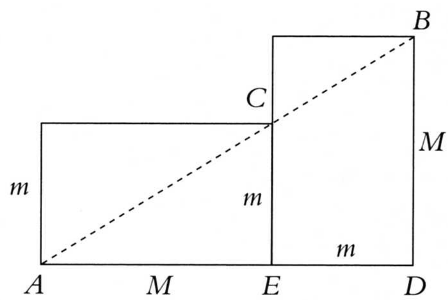
Еще древние греки заметили, что некоторые объекты природы, меняясь по величине, всегда сохраняют свою форму. Это явление получило название гномонического роста. Изобретатель и инженер Герон Александрийский дал такое определение: *«Гномон — это фигура, которая, будучи добавлена к другой фигуре, образует новую фигуру, подобную исходной»*. Гномон «золотого» прямоугольника представляет собой квадрат со стороной, равной длине «золотого» прямоугольника.

Так как $M/m = \Phi$ (см. (4)), то отсюда следует, что $\dfrac{M-m}{m} = \dfrac{M}{m} - 1 = \Phi - 1 = \dfrac{1}{\Phi}$. Что и требовалось доказать.



Как и в случае подобных прямоугольников, существует простой и быстрый способ узнать, является ли прямоугольник «золотым», без измерения его сторон. Возьмем два одинаковых прямоугольника и поместим их рядом друг с другом, один горизонтально, другой вертикально, как на следующем рисунке слева. Затем мы проведем линию через вершины A и B, как показано на рисунке справа. Если эта прямая проходит точно через вершину C, то мы имеем два «золотых» прямоугольника одинакового размера.





Как можно объяснить этот факт? По теореме Фалеса, если две параллельные прямые пересекают две стороны треугольника, то они отсекают пропорциональные отрезки. На втором рисунке мы видим, что AB будет проходить через C, когда

$$AD/DB = AE/EC.$$

Однако если мы подставим значения для каждой из этих сторон, то получим: $(M + m)/M = M/m$.

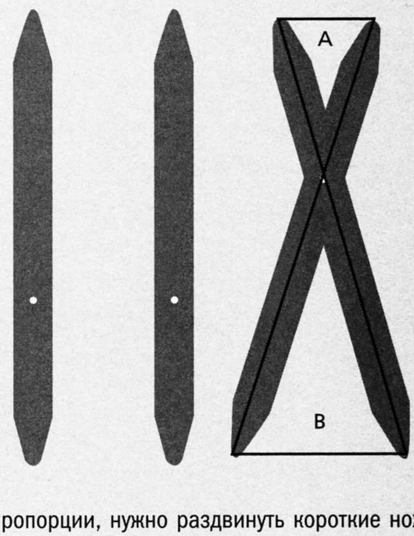
И снова мы видим уравнение (4), определяющее Ф.

Если у нас имеется «золотой» циркуль (см. ниже), достаточно раздвинуть короткие ножки циркуля на расстояние, равное ширине прямоугольника, а затем прове-

КАК СДЕЛАТЬ «ЗОЛОТОЙ» ЦИРКУЛЬ

«Золотой» циркуль – это простой инструмент, который легко сделать самому. Он нужен для построения отрезков, разделенных в «золотом» отношении, или для проверки такой пропорции.

Существуют различные способы сделать «золотой» циркуль. Вот самый простой из них. Возьмем две заостренные на концах полоски картона, пластика или фанеры, шириной 2 см и длиной 34 см. Проделаем в них отверстия на расстоянии 13 см от одного из концов.



Соединим обе полоски через эти отверстия так, чтобы они могли поворачиваться. Обычная кнопка вполне для этого подойдет. Раздвинув полоски, мы получим два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами 21 и 13 см соответственно. Так как это два последовательных числа из последовательности Фибоначчи, их отношение близко к Ф. Отношение расстояния между длинными ножками циркуля к расстоянию между короткими ножками циркуля также будет Ф.

Циркуль очень прост в использовании. Чтобы убедиться, что два отрезка находятся в «золотой» пропорции, нужно раздвинуть короткие ножки циркуля на расстояние, равное длине меньшего отрезка, и, не меняя положения циркуля, измерить длинными ножками длину большего отрезка. Если его длина равна расстоянию между длинными ножками циркуля, то два отрезка находятся в «золотой» пропорции.

рить, совпадает ли расстояние между длинными ножками циркуля с длиной прямоугольника. Если это так, то прямоугольник является «золотым».

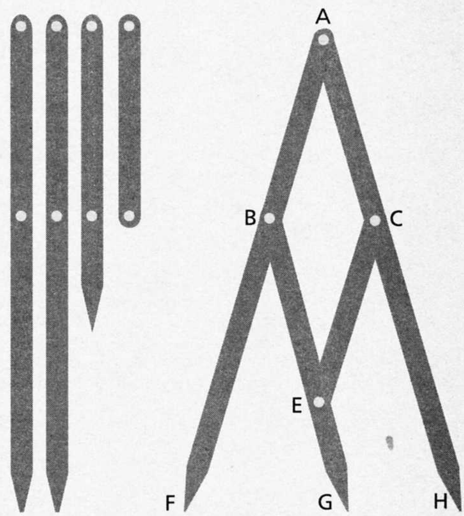
Построение «золотого» прямоугольника

Теперь наша задача будет гораздо проще. Для построения «золотого» прямоугольника мы используем все свойства, о которых говорилось выше.

Начнем с квадрата $ABCD$, чья сторона будет шириной «золотого» прямоугольника, который мы будем строить. Отметим точку M — середину стороны AB. Проведем дугу окружности с центром в точке M и радиусом MC (расстояние от M до одной из противоположных вершин). Эта дуга пересекается с продолжением

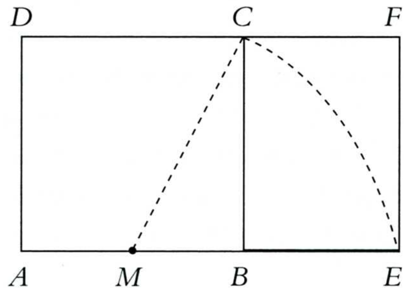
Второй способ построения «золотого» циркуля более сложен, но более точен, так как позволяет работать и с крайним, и со средним отношением одновременно. Нам потребуются четыре узких полоски 1 см в ширину. Две из них длиной 34 см, одна — 21 см, а четвертая — 13 см. Проделаем два отверстия в каждой из них: одно на конце полоски, а второе — на расстоянии 13 см, как на рисунке справа. Затем мы соединим полоски как показано на рисунке. У нас получились следующие отрезки:

$AF = AH = 34$ см
$BG = 21$ см
$AB = AC = BE = CE = 13$ см
$EG = 8$ см.



Все эти числа — члены последовательности Фибоначчи. При работе с циркулем отношение *FG* к *GH* всегда будет очень близко к Ф. Если мы поставим ножки циркуля *F* и *H* на концы отрезка (до 68 см в длину), точка *G* покажет место, где отрезок делится на две части *M*, *m*, такие, что $M/m = \Phi$.

отрезка AB. Обозначим это пересечение точкой E. Тогда длина отрезка AE является длиной искомого «золотого» прямоугольника. Нам осталось только провести перпендикуляр из точки E, который пересекает продолжение отрезка DC в точке F. Таким образом, мы построили «золотой» прямоугольник $AEFD$.



Давайте найдем длины сторон «золотого» прямоугольника, который мы построили, чтобы проверить «золотое» сечение. Предположим, что $AB = AD = 1$, тогда $AE = AM + ME = 1/2 + ME$. Так как ME равна длине гипотенузы прямоугольного треугольника MBC, по теореме Пифагора мы имеем:

$$\mathrm{ME}^2 = \mathrm{MC}^2 = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{BC}^2 = (1/2)^2 + 1^2 = 1/4 + 1 = 5/4.$$

Откуда

$$ME = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно:

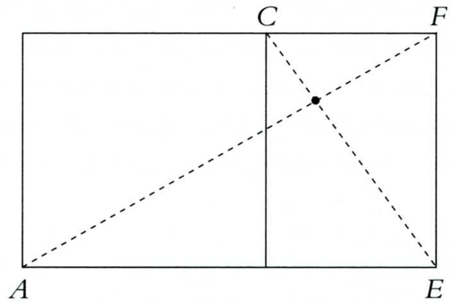
$$AE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

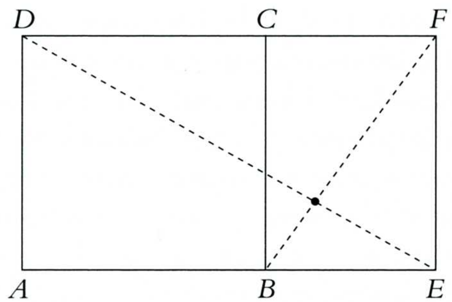
Это значит, что стороны прямоугольника $AEFD$ равны 1 и Φ. То есть наш прямоугольник действительно является «золотым».

Свойства «золотого» прямоугольника

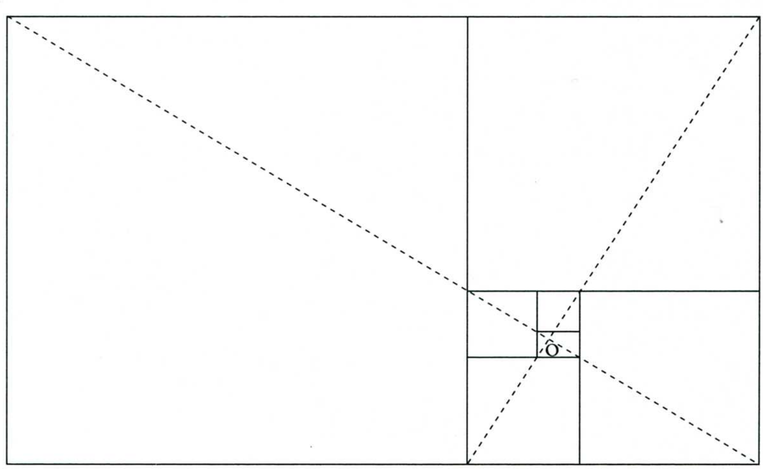
Если отрезать от нашего «золотого» прямоугольника квадрат, то останется прямоугольник $BEFC$, который также является «золотым». Проведя диагонали в двух «золотых» прямоугольниках, мы увидим, что они всегда пересекаются под прямым углом. Это справедливо как для пары AF и CE, так и для пары DE и BF (диагонали в каждой паре перпендикулярны друг к другу).

Мы видим это на следующих рисунках:





Если мы продолжим отрезать квадраты от каждого следующего «золотого» прямоугольника и каждый раз будем проводить диагонали, как на рисунке выше, мы увидим, что все получившиеся диагонали будут лежать на одной из пересекающихся под прямым углом диагоналей. Таким образом, они всегда будут перпендикулярны, а точка их пересечения всегда будет одной и той же точкой O.

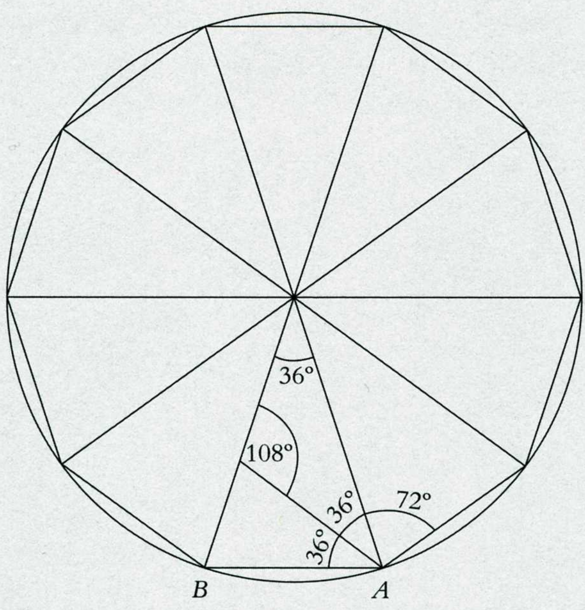


Если бы мы могли использовать микроскоп, чтобы увидеть все прямоугольники, которые могут быть образованы путем удаления квадратов, мы бы заметили, что точка пересечения их диагоналей всегда одна и та же, хотя мы уменьшаем размер прямоугольника в Ф раз. Это невероятное свойство характерно для «золотого» прямоугольника. Точка O является своего рода геометрической черной дырой, точкой притяжения, куда уходит бесконечная последовательность «золотых» прямоугольников.

ПРАВИЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольник называется правильным, если все его стороны и все углы равны. Лишь одного из этих условий недостаточно. Ромб, например, имеет равные стороны, но его углы не равны, поэтому он не является правильным многоугольником. Из всех четырехсторонних многоугольников только квадрат является правильным. Прямоугольник имеет четыре равных угла по 90°, но стороны разной длины, поэтому он также не является правильным многоугольником.

Многоугольник называется вписанным, если все его вершины лежат на окружности. Если это правильный многоугольник с n сторонами, мы можем построить равнобедренный треугольник, соединив центр окружности с двумя соседними вершинами многоугольника. Две равные стороны треугольника будут радиусами окружности. Третья сторона треугольника имеет ту же длину, что и у сторон многоугольника. Неравный угол треугольника (также называемый центральным углом) равен $(360/n)°$.



Если мы впишем в окружность правильный десятиугольник (многоугольник с десятью равными сторонами, углы которого также равны), отношение между радиусом и стороной многоугольника будет точно Ф.

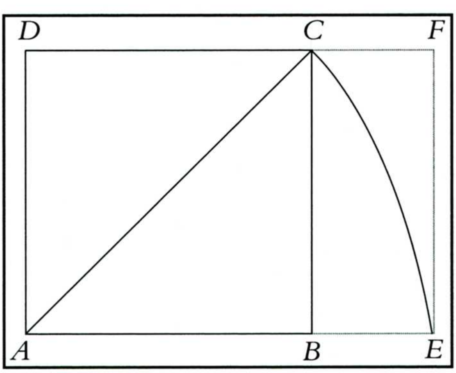
Следовательно, мы можем сказать, что длина «золотого» прямоугольника является радиусом окружности, а ширина равна стороне правильного десятиугольника, вписанного в эту окружность. В третьей главе мы подробно рассмотрим это соотношение.

Другие замечательные прямоугольники

Как мы видели на странице 51, прямоугольники телеэкранов (4:3 и 16:9) замечательны тем, что часто встречаются в нашей повседневной жизни. Теперь рассмотрим другие прямоугольники, с которыми мы сталкиваемся каждый день, и сравним их с «золотыми» прямоугольниками, чтобы еще раз подчеркнуть уникальность прямоугольников с форматным отношением Ф.

Прямоугольник с отношением $\sqrt{2}$

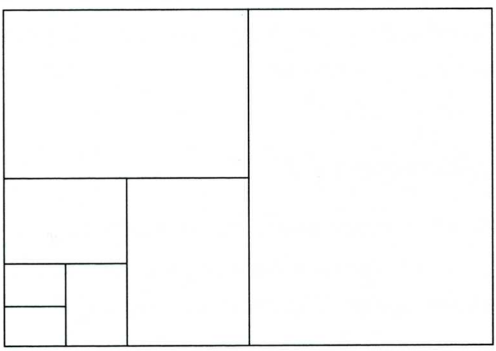
Построим квадрат $ABCD$ со стороной 1. Затем проведем дугу окружности с центром в одной из вершин квадрата (в этом примере в точке A) и радиусом, равным расстоянию между этой вершиной и противоположной (AC). Дуга пересекает продолжение отрезка AB в точке E. Длина отрезка AE, будучи равной длине диагонали квадрата 1 x 1, равна $\sqrt{2}$, и, следовательно, прямоугольник, который мы построили, имеет стороны 1 и $\sqrt{2}$. Далее мы будем называть прямоугольники этого типа прямоугольниками с отношением $\sqrt{2}$ (так как отношение между сторонами $\sqrt{2}$ и 1 равно $\sqrt{2}$).



Характерным свойством прямоугольников с отношением $\sqrt{2}$ является следующий факт. Если мы разделим большую сторону прямоугольника пополам, мы получим еще один прямоугольник с отношением $\sqrt{2}$, по площади в два раза меньший. Стороны нового прямоугольника имеют длины 1 и $\sqrt{2}/2$, и отношение этих длин снова равно $\sqrt{2}$.

В самом деле, $\frac{1}{\sqrt{2}/2}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Гномоном прямоугольника с отношением $\sqrt{2}$ является тоже прямоугольник с отношением $\sqrt{2}$.

Этот процесс можно повторять бесчисленное количество раз, получая новые прямоугольники с отношением $\sqrt{2}$. Тот же самый итог выходит в результате удвоения меньшей стороны прямоугольника с отношением $\sqrt{2}$: мы снова получим прямоугольник с отношением $\sqrt{2}$. На следующем рисунке показан результат различных итераций.



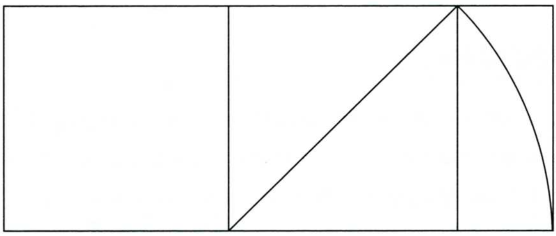
Это свойство прямоугольника с отношением $\sqrt{2}$ используется при выборе размеров бумаги для европейских канцелярских принадлежностей: так называемый стандарт DIN. Это аббревиатура от Deutsches Institut fur Normung (Германский институт стандартизации), который в 1922 г. ввел этот стандарт, разработанный инженером Вальтером Порстманом.

Размеры начинаются с самого крупного A0, представляющего собой прямоугольник с отношением $\sqrt{2}$ площадью один квадратный метр. Каждый следующий размер обозначается номерами (A1, A2, A3, A4 ...) и имеет форму прямоугольника с отношением $\sqrt{2}$. Лист бумаги каждого следующего размера получается простым делением пополам.

В терминах вписанных многоугольников ширина прямоугольника с отношением $\sqrt{2}$ является радиусом окружности, а длина — стороной квадрата, вписанного в нее. Например, если радиус равен единице, то длина стороны вписанного квадрата равна $\sqrt{2}$. Фундаменты зданий часто имеют форму прямоугольника с отношением $\sqrt{2}$.

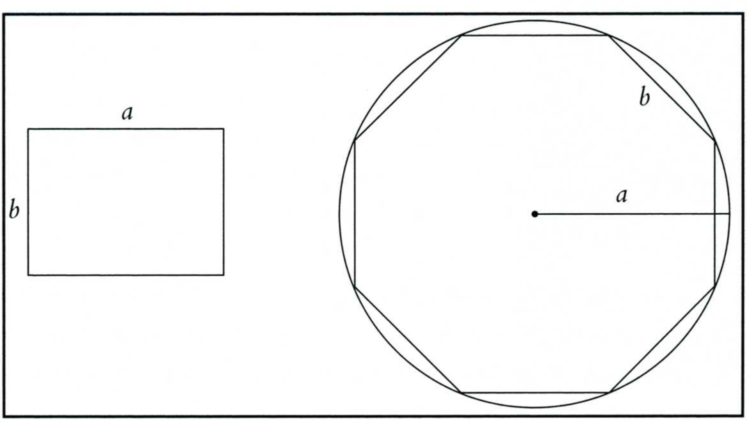
Серебряный прямоугольник

Серебряный прямоугольник, или серебряное сечение, получается при добавлении к прямоугольнику с отношением $\sqrt{2}$ квадрата со стороной 1. Такой прямоугольник имеет форматное отношение $(1 + \sqrt{2})$, которое, как мы видели в предыдущей главе, является решением уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$ и называется серебряным сечением. Прямоугольник, полученный таким способом, более вытянут, чем исходный, так что объекты, в которых он используется, такие как врата храмов и поэтажные планы зданий, выглядят более изящными.



Прямоугольник Кордовы

Одним из главных памятников мавританской архитектуры в испанском городе Кордова (Cordoba) является знаменитая мечеть Мескита с восьмиугольным михрабом (молитвенной нишей). Испанский архитектор Рафаэль де Ла-Ос (1924–2000), изучая ее пропорции, обнаружил особый прямоугольник, который объясняет красоту ее формы. Де Ла-Ос описал эту пропорцию как отношение сторон прямоугольника, длина которого равна радиусу окружности, а ширина — длине стороны правильного восьмиугольника, вписанного в эту окружность. Он получил название прямоугольника Кордовы и выглядит более низкорослым, чем «золотой» прямоугольник.



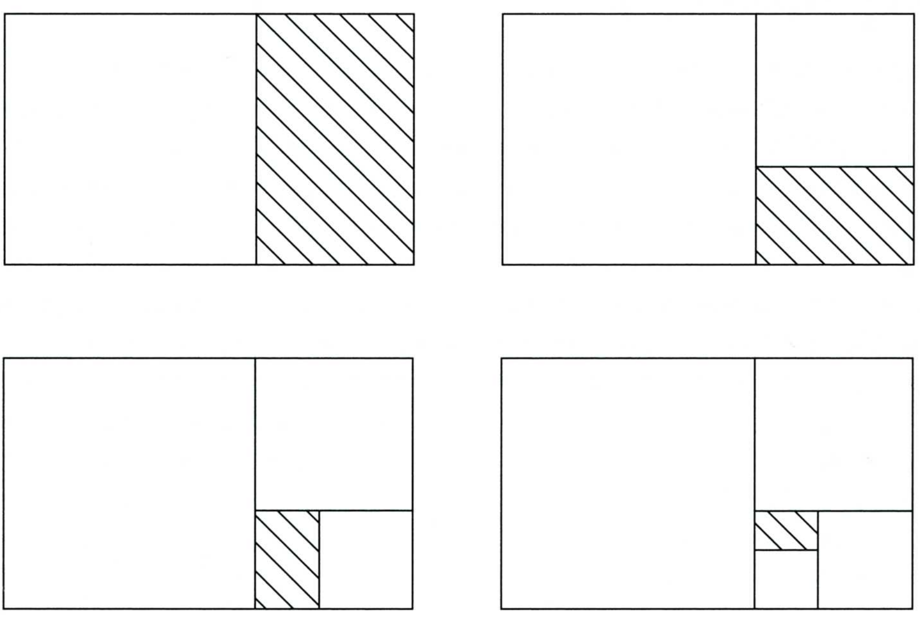
Чтобы вычислить форматное отношение этого прямоугольника, мы должны выразить длину стороны L правильного восьмиугольника через радиус R описанной вокруг него окружности. Тогда мы получим:

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cong 1{,}307.$$

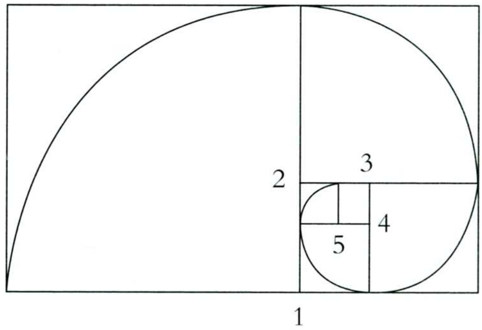
Это так называемое сечение Кордовы, или число Кордовы.

Спирали и золотое сечение

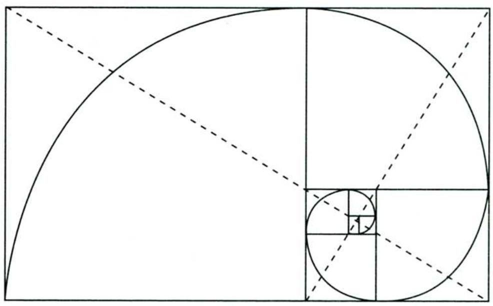
Но самым удивительным образом Ф проявляется в спиралях. Предположим, у нас есть «золотой» прямоугольник, от которого мы отсекаем квадраты, получая все меньшие «золотые» прямоугольники по уже знакомой нам процедуре.



Затем мы проведем четверть дуги окружности в каждом из отсекаемых квадратов. Радиус каждой из окружностей равен длине стороны квадрата, а центром является вершина, общая со следующим «золотым» прямоугольником. Это будут точки 1, 2, 3, 4, 5 …



Таким образом мы получим линию, называемую логарифмической спиралью.



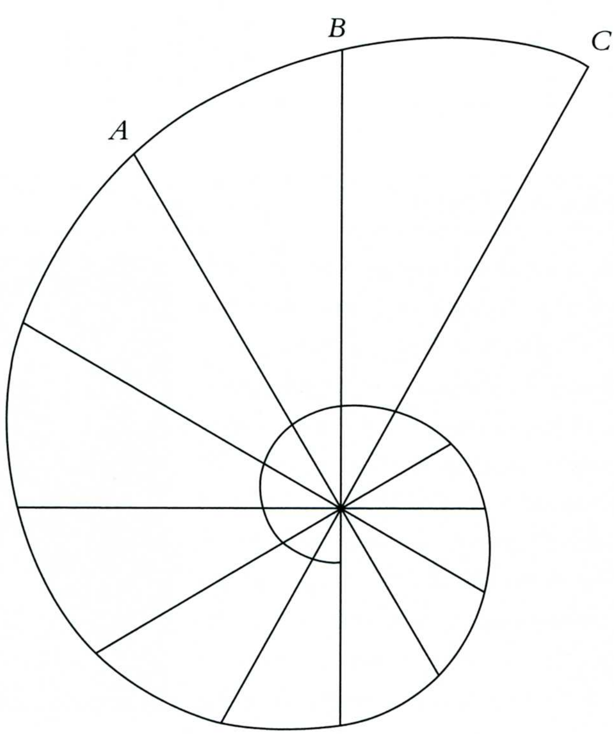
ЯКОБ БЕРНУЛЛИ И СПИРАЛИ

Спираль и ее свойства вызывали интерес у многих выдающихся математиков. Якоб Бернулли (1654–1705) был особенно очарован спиралями, которым он посвятил многие годы исследований. Это его увлечение привело к тому, что он даже завещал выгравировать спираль на его могиле, вместе с надписью *Eadem mutato resurgo*, что означает «Изменяясь, я воскресаю неизменным». Однако несмотря на строгие инструкции, гравер не смог воспроизвести логарифмическую спираль, а изобразил серию дуг, к которым слова Бернулли неприменимы.

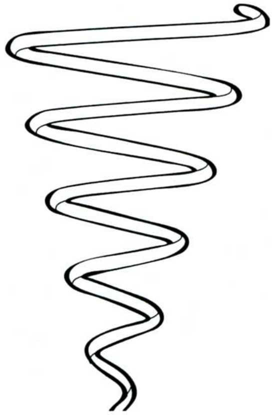
Спираль является такой кривой линией, форма которой не меняется при изменении размера. Это свойство называется самоподобием.

Другим важным свойством спирали является равноугольность: если провести прямую линию от центра спирали, точки ее возникновения, к любой другой точке, углы пересечений с кривой всегда будут одинаковыми. Поэтому, если мы хотим наблюдать точку под постоянным углом, мы должны двигаться вокруг нее по траектории, которая является логарифмической спиралью. Она также известна как геометрическая спираль, так как длина радиус-вектора — отрезка, соединяю-щего центр с точкой на спирали — увеличивается в геометрической прогрессии, в то время как угол, образованный радиус-вектором, увеличивается в арифметической прогрессии.

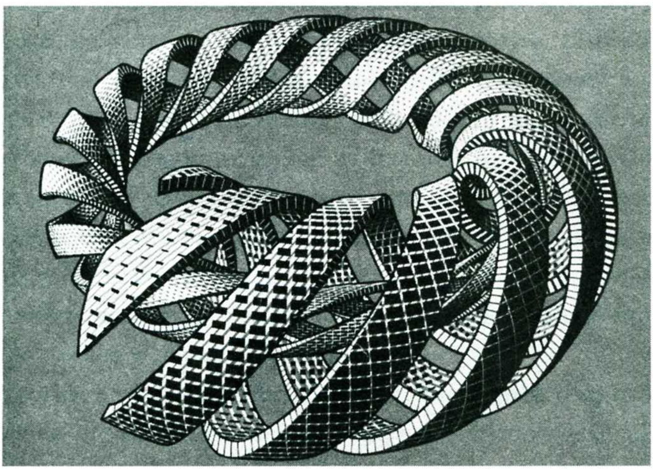
Строго говоря, кривая, которую мы только что построили в наших «золотых» прямоугольниках, не является спиралью, так как она образована дугами разных окружностей, соединенных между собой искусственно, но она приближена к логарифмической спирали. Спираль не касается четвертинок окружностей, а пересекает их, пусть и под очень малым углом. Настоящая логарифмическая спираль выглядит следующим образом:



Если мы будем выполнять те же построения, но добавим изменения по высоте, то получим трехмерную спираль, как показано на следующем рисунке:



Свойства спирали привлекали не только ученых, но и художников.



Работа нидерландского художника Маурица Корнелиса Эшера (1898-1972), известного своими нереальными мирами, изображенными на картинах и мозаиках. Многие его работы основаны на математике. Эшер часто рисовал спираль, как это можно видеть на гравюре 1953 г., озаглавленной просто: «Спирали».

Мы еще не исчерпали все возможности спирали. По правде говоря, мы только начали знакомство с ней. Позже мы найдем ее в «золотых» треугольниках, а также во многих красивых природных объектах.

Глава 3

Золотое сечение и пятиугольник

Ассирийцы рисовали пятиугольники самым обычным образом: раздвинув пальцы кисти руки и оставляя отпечатки пальцев на глине. Затем эти точки соединялись отрезками. Такие изображения часто встречаются на глиняных табличках. Однако построение пятиугольников было серьезной задачей для древних греков. По их мнению, единственным точным методом построения геометрических фигур было использование циркуля и линейки, но этих инструментов оказалось недостаточно, чтобы начертить правильный пятиугольник.

Правильный пятиугольник

Использование циркуля и линейки для геометрических построений, как это делали еще древние греки, является очень ограниченным методом. И некоторые ограничения представляются довольно причудливыми. Метод включает в себя рисование точек, прямых (или их отрезков) и частей окружности (или дуг) с использованием лишь циркуля и линейки неопределенной длины, без делений на ней. С помощью этих инструментов можно разделить отрезок пополам (провести перпендикуляр через его середину), построить биссектрису угла, найти точку, симметричную данной относительно другой, провести параллельную прямую или перпендикуляр в данной точке, а также найти проекцию точки на прямую линию. Также можно разделить любой отрезок на заданное число равных частей.

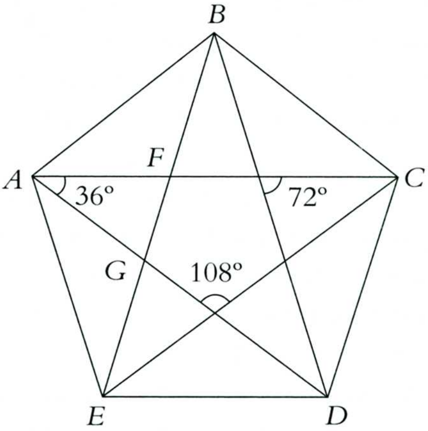
Однако существует ряд классических задач, известных тем, что они не могут быть решены лишь с помощью линейки и циркуля. Например, квадратура круга (построение квадрата с той же площадью, что и у данного круга), удвоение куба (построение куба, который имеет в два раза больший объем, чем данный куб с известной стороной) или деление угла на три равные части. Кроме того, невозможно построить некоторые правильные многоугольники, используя только циркуль и линейку, например, семиугольник и пятиугольник.

Тем не менее, правильный пятиугольник может быть построен с помощью линейки и циркуля с использованием Ф. Таким образом, число Ф внесло свой вклад в решение классических задач эпохи.

К. Ф. ГАУСС (1777–1855)

Немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (справа) является одним из величайших научных деятелей. После смерти он был удостоен почетного титула «принц математиков». Он решил специализироваться на математике несмотря на то, что делал большие успехи и в других областях. На решение Гаусса частично повлияло его открытие метода построения правильного 17-угольника с помощью линейки и циркуля. Гаусс сделал это в возрасте 18 лет, и это стало ключевым моментом не только его карьеры, но и всей будущей математики.

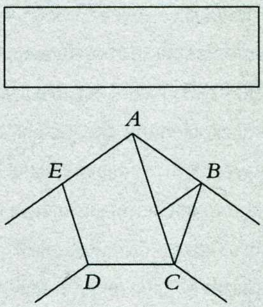
Рассмотрим правильный пятиугольник, в котором проведены диагонали.

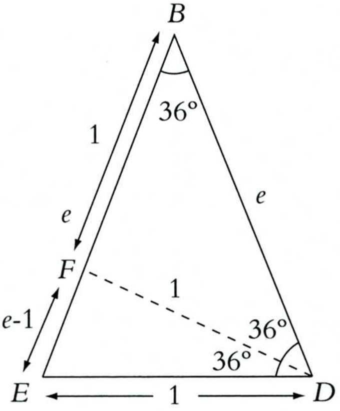


Остановимся на треугольнике BED, одном из трех равнобедренных треугольников. Длина его равных сторон $BE = BD$ равна e, длине диагонали пятиугольника (стороне пятиконечной звезды). Кроме того, сторона ED является стороной пятиугольника ρ, которую мы возьмем равной единице: $\rho = 1$. Теперь проверим, что выполняется соотношение $EB/ED = e/\rho = e/1 = \Phi$ и, следовательно, мы имеем золотое сечение. Другими словами, $e = \Phi$.

ПРАВИЛЬНЫЙ ПЯТИУГОЛЬНИК ИЗ ПОЛОСКИ БУМАГИ

Несмотря на все ограничения, существует простой способ построения правильного пятиугольника, если только мы не стремимся к абсолютной точности. Надо взять полоску бумаги и завязать ее в узел. В результате получится правильный пятиугольник. Посмотрите внимательно на рисунок. Стороны полученного правильного пятиугольника *ABCDE* лежат на гипотенузе одинаковых треугольников, больший катет которых имеет ширину полоски.





Деля угол D пополам, мы получим треугольник DEF. Он имеет такие же углы, что и BED, следовательно, эти треугольники подобны. Отсюда следует, что

$$EB/ED = ED/EF. \qquad (1)$$

Так как $ED = FD = FB = 1$ и $EF = EB - 1$, подставляя в (1), получим:

$$\frac{EB}{1} = \frac{1}{EB-1}$$

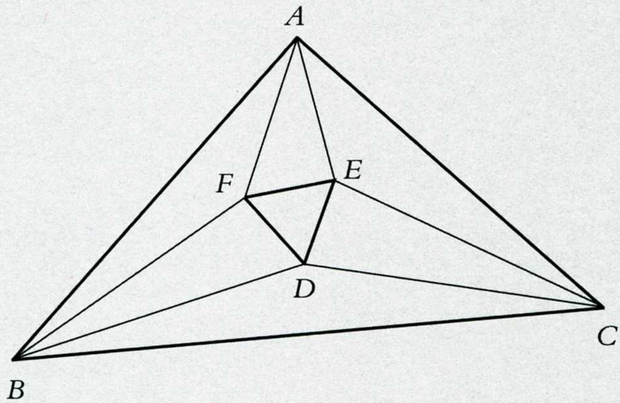
$$EB^2 - EB = 1$$

$$EB^2 - EB - 1 = 0$$

$$EB = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

ТЕОРЕМА МОРЛИ

Эта теорема необычна тем, что она не была известна древним грекам, хотя те открыли большинство свойств треугольника еще 2000 лет назад. Теореме чуть более ста лет. Фрэнк Морли (1860–1937) доказал ее в 1904 г., но опубликована она была лишь 20 лет спустя. Теорема Морли заключается в следующем: если мы разделим внутренние углы любого треугольника на три равные части, проведя по две прямые линии из каждого угла, то шесть линий пересекутся, образуя три точки, которые всегда являются вершинами равностороннего треугольника. Независимо от того, каким был исходный треугольник, мы всегда получим равносторонний треугольник как результат пересечения трисектрис.



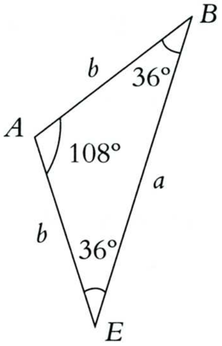
Равносторонний треугольник FED является треугольником Морли.

Таким образом, мы доказали, что отношение диагонали к стороне правильного пятиугольника равно Ф.

Но у звезды пятиугольника имеются и другие связи с золотым сечением. Давайте посмотрим на пятиугольник и на треугольники, которые появляются, когда мы проводим диагонали. Мы видим только три разных угла: 36°, 72° и 108°. Кроме того, так как 72 — это два раза по 36, а 108 — это три раза по 36, то все углы являются кратными 36°.

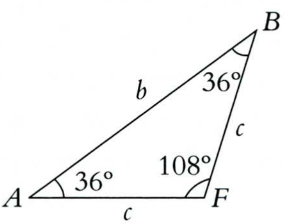
Мы видим много равнобедренных треугольников, но среди них только три разных типа: треугольники ABE, ABF и AFG. Все остальные подобны одному из них. Кроме того, мы видим только четыре отрезка различной длины. Назовем их $BE = a$, $AB = AE = b$, $AF = BF = AG = c$ и $GF = d$, так что $a > b > c > d$.

К каждому из этих треугольников мы применим теорему синусов, которая утверждает, что в любом треугольнике отношение длины стороны к синусу противолежащего угла есть величина постоянная. В треугольнике ABE:



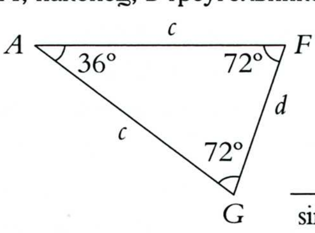
$$\frac{a}{\sin 108^\circ}=\frac{b}{\sin 36^\circ} \qquad \frac{a}{b}=\frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}.$$

В треугольнике ABF:



$$\frac{b}{\sin 108^\circ}=\frac{c}{\sin 36^\circ} \qquad \frac{b}{c}=\frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}.$$

И, наконец, в треугольнике AFG:



$$\frac{c}{\sin 72^\circ}=\frac{d}{\sin 36^\circ} \qquad \frac{c}{d}=\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}.$$

Так как $72^\circ = 180^\circ - 108^\circ$, и синусы дополнительных углов равны, мы имеем, что $\sin 72^\circ = \sin 108^\circ$.

Таким образом, мы установили следующее соотношение:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}=1{,}618033988\ldots$$

С помощью тригонометрии мы доказали, что для четырех отрезков, расположенных от большего к меньшему, отношение длины каждого из них к длине следующего за ним постоянно и равно золотому сечению.

Мы можем получить это соотношение по-другому, начиная с первого из равенств, используя то, что $c = a - b$, и учитывая, что стороны пятиугольника одинаковы, т.е. $b = 1$.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \to \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \to \frac{a}{1} = \frac{1}{a-1} \to a^2 - a - 1 = 0 \to a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$a = \Phi.$$

Таким образом, мы видим, что отношение длин двух последовательных отрезков равно золотому сечению.

«Золотой» треугольник

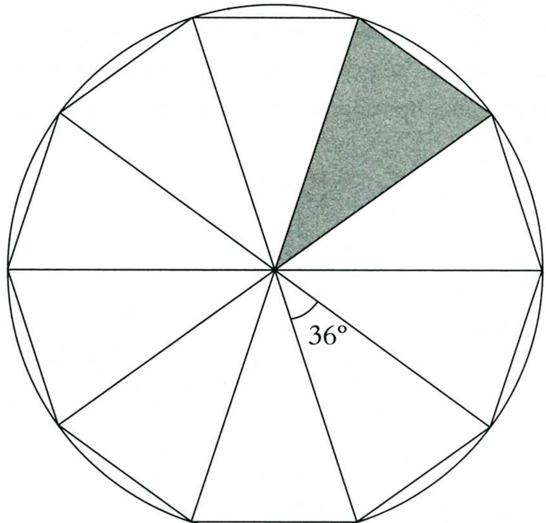
Как мы только что видели, пятиугольник и его диагонали образуют два типа равнобедренных треугольников. Первый имеет углы 36°, 36° и 108°, а второй — 36°, 72° и 72°. В обоих случаях отношение длины большей стороны к меньшей равно Ф. Поэтому их называют «золотыми» треугольниками. Иногда название дается по типу: треугольник с углами 36°, 72° и 72° называется «золотым» треугольником, а треугольник с углами 36°, 36° и 108° называется «золотым» гномоном. Мы не будем выделять это различие.

При проведении диагоналей в правильном пятиугольнике получается еще один правильный пятиугольник в центре, окруженный «золотыми» треугольниками. Кроме того, лучи звезды также являются «золотыми» треугольниками.

С помощью «золотого» треугольника можно построить правильный пятиугольник, используя только циркуль и линейку. Возьмем отрезок длиной 1, который разделим в золотой пропорции (как в предыдущей главе), выделив часть длиной x. Затем мы построим «золотой» треугольник со сторонами x и 1. Проведем окружность радиуса 1 с центром в вершине угла 36° (который лежит напротив стороны x). Десятиугольник, вписанный в окружность, имеет стороны длины x. После того как мы построили десятиугольник, мы соединим его вершины через одну. Таким образом, мы построим правильный пятиугольник.

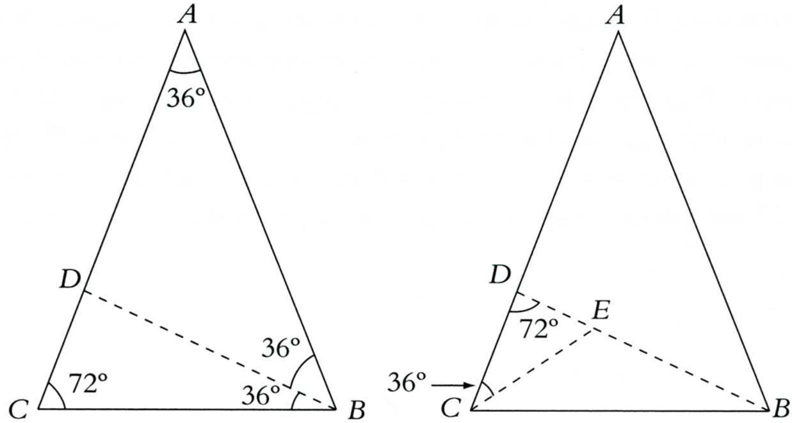
Тот же метод может быть использован для построения правильного десятиугольника. Геометры Древней Греции таким образом упражнялись, демонстрируя математические возможности золотого сечения.

При таком построении стороны «золотого» треугольника равны стороне правильного десятиугольника, вписанного в круг, и радиусу этого круга.

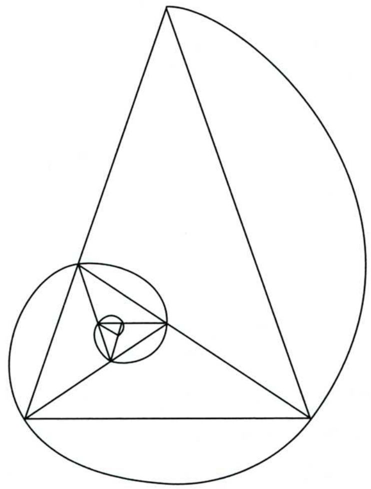


В предыдущей главе мы выяснили, что с помощью «золотого» прямоугольника можно получить логарифмическую спираль, но ее можно также построить, взяв «золотой» треугольник ABC с углами $36°$, $72°$ и $72°$ (в котором $AB/BC = \Phi$). Если разделить угол B пополам, мы получим два треугольника: DAB и BCD. Первый имеет углы $36°$, $36°$ и $108°$, поэтому является «золотым» треугольником.

Второй, BCD, подобен исходному, так что тоже является «золотым» треугольником. Если мы продолжим процесс, разделив угол C пополам, то получим еще один треугольник CDE, который, в свою очередь, подобен предыдущим двум.



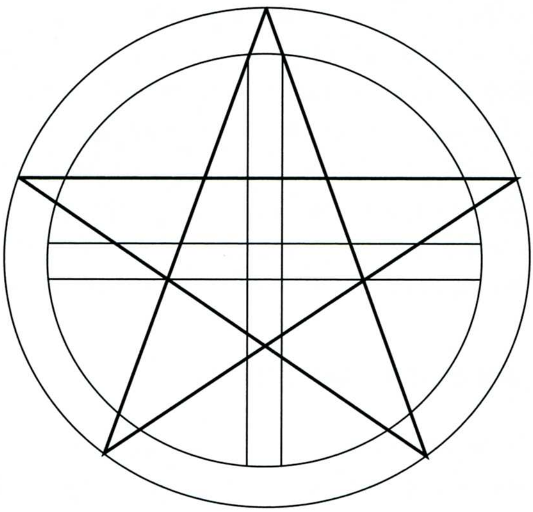
Теперь вспомним, как мы получали меньшие «золотые» прямоугольники, удаляя в данном «золотом» прямоугольнике квадраты. Если в «золотом» треугольнике мы будем продолжать делить углы пополам, то будем получать все меньшие «золотые» треугольники. Этот процесс эквивалентен удалению «золотого» гномона. Таким образом мы получим спираль последовательных «золотых» треугольников, сходящуюся, как и в случае «золотых» прямоугольников, к одной точке.



Символика пятиконечной звезды

Почему те звезды, которые мы наблюдаем на небе, испокон веков изображаются в виде пятиконечной звезды? Одно из объяснений: из-за их мерцания. Этот визуальный эффект вызван прохождением звездного света через верхние слои атмосферы разной плотности. Как бы то ни было, мало что изменилось с тех пор, когда наши предки изучали небо, пытаясь разгадать его скрытый смысл. Изображение звезд в виде пятиконечной звезды встречается с древних времен, еще на глиняных табличках Месопотамии, а также в египетских иероглифах.

Символ пятиконечной звезды, известный как пентаграмма, служил тайным знаком пифагорейцев. Для них пентада, то есть число 5, олицетворяла здоровье и красоту, поскольку она была гармоничным сочетанием числа 2, первого четного числа, или диады, и числа 3, первого нечетного числа, или триады.



Пентаграмма — это геометрическая фигура, имеющая долгую историю в качестве символа тайных обществ. Она использовалась рыцарями ордена розенкрейцеров и часто встречается в эмблемах масонских лож.

Изображение пятиконечной звезды часто встречается в нашей повседневной жизни. Например, звезды на Голливудской «Аллее славы» в Лос-Анджелесе, а также эмблемы многих революционных групп.

Звезда — важный элемент на разных флагах и не только знак революционной идеологии. Она встречается на флагах некоторых мусульманских стран, таких как Марокко, символизируя пять заповедей ислама. Кроме того, звезды, обозначающие штаты на флаге США, также пятиконечные.

МАТИЛА ГИКА (1881–1965)

Принц Матила Гика был писателем, румынским дипломатом и профессором эстетики в Соединенных Штатах. Он изучал золотое сечение, о котором писал в книгах, сегодня считающихся классическими, таких как «Эстетика пропорций в природе и искусстве» (1927) и «Золотое сечение» (1931). Благодаря его работам золотое сечение стало частью современной европейской культуры. В своих книгах он выдвинул известный тезис: древнегреческие художники классической эпохи использовали золотое сечение преднамеренно. Хотя эта идея очень популярна, она не принята другими экспертами и по-прежнему остается предметом дискуссий.

Книги Гика пытались охватить всю классическую культуру, уделяя особое внимание идеям Платона о том, что числа «существуют» не только в абстрактном мире. Идеи Гика стали популярны во всем мире и приобрели известных, хотя иногда слишком пылких сторонников, таких как французский поэт Поль Валери.

Периодические и апериодические плитки

В нашей беспокойной жизни нам часто не хватает времени, чтобы обратить внимание на окружающий мир, в том числе на то, что у нас под ногами. Поэтому мы не замечаем геометрии на тротуаре (если, конечно, обо что-нибудь случайно не споткнемся). В этом параграфе мы займемся формами кирпичей, керамической плитки и мозаики — всего того, что нас окружает.

Все мы знаем, что такое мозаика. Однако было бы неплохо получить ее точное определение. Мозаика, таким образом, будет определяться как такое покрытие поверхности кусочками, которые мы называем мозаичной плиткой (или просто плитками), когда между этими плитками не остается зазоров, и никакие плитки не перекрывают друг друга.

Для математиков наиболее интересны такие мозаики, в которых покрытие состоит из многоугольников, потому что многоугольники могут иметь общие стороны и вершины и поэтому представляют собой отличное поле для геометрических экспериментов. Это может показаться сложной задачей, однако нас окружает множество реальных примеров: плитка на полу, на стенах домов, в служебных помещениях и даже на улице.

УГЛЫ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Существует способ нахождения величины углов в правильном многоугольнике с любым числом сторон. Так как все углы правильного многоугольника равны, для начала нужно вычислить сумму всех углов правильного многоугольника с известным числом сторон. Затем мы разделим результат на количество сторон и получим величину каждого из углов.

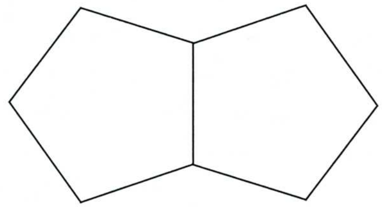
Чтобы найти сумму углов многоугольника, у которого n сторон, мы выберем любую вершину и проведем диагонали, соединив ее со всеми другими вершинами. Мы получим $(n - 3)$ диагоналей, так как эту вершину можно соединить со всеми остальными, за исключением двух соседних. Диагонали образуют $(n - 2)$ треугольников. Таким образом, сумма углов всех этих треугольников равна сумме углов исходного многоугольника. Как мы знаем, сумма углов любого треугольника равна 180°. Таким образом, общая сумма углов многоугольника будет $S = (n - 2)\cdot 180°$.

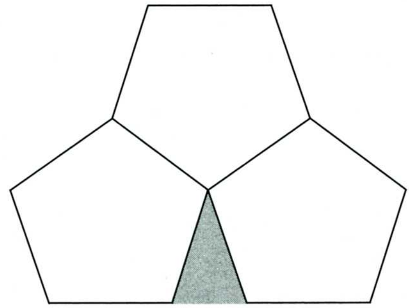
Каждый из углов правильного многоугольника будет равен $s = (n - 2)\cdot 180°/n$. Подставляя в это выражение вместо n число сторон наиболее распространенных многоугольников, мы получим следующую таблицу:

Число сторон	3	4	5	6	7	8	10	12
Величина угла (°)	60	90	108	120	128,6	135	144	150

Главной задачей, связанной с мозаикой, является нахождение наименьшего узора, который, повторяясь, позволяет заполнить данную поверхность. Этот минимальный узор может быть одной плиткой, которая заполняет поверхность, просто повторяясь, без поворотов и симметрии. Такой процесс дает нам так называемую периодическую мозаику. Апериодические мозаики не имеют минимального узора для покрытия поверхности, но заполняют все пространство, используя золотое сечение.

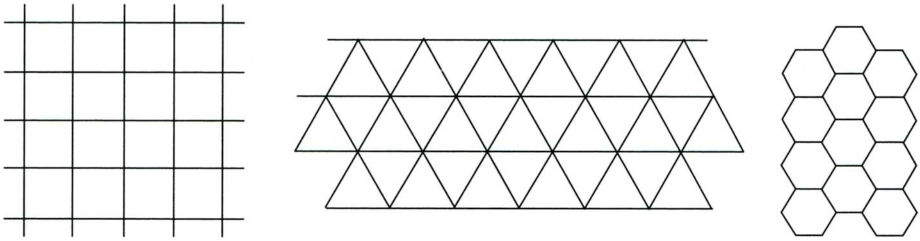
Предположим, что мы должны покрыть пол (или любую другую ровную поверхность) плиткой, имеющей форму правильного многоугольника. Какую форму предпочесть? Можно подумать, что любой правильный многоугольник подойдет, но это не так. Например, мы не сможем сделать покрытие из правильных пятиугольников. Чтобы убедиться в этом, достаточно нарисовать и вырезать несколько равных правильных пятиугольников, положить их на ровную поверхность и попытаться покрыть площадь, равную сумме площадей пятиугольников. Прежде всего, попытаемся разложить их так, чтобы их вершины касались друг друга. С первыми двумя никаких проблем не возникнет, но когда мы добавим третий, то увидим, что осталось немного места, которое не может быть заполнено другим пятиугольником.



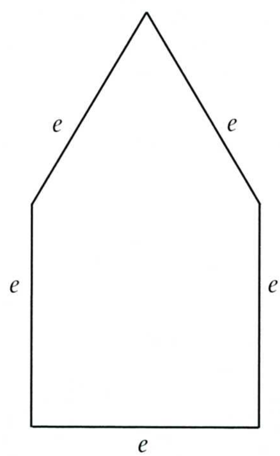


Угол правильного пятиугольника равен 108°. Соединяя три пятиугольника, мы получим общий угол $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$. Пространство было бы заполнено, если общий угол был бы равен 360°, величине полного оборота. Нам не хватает 36°. Если мы добавим еще один пятиугольник, у нас будет слишком много градусов для полного оборота.

Мы нашли необходимое условие для покрытия равными многоугольниками: сумма углов должна быть 360°. Другими словами, угол правильного многоугольника должен быть делителем 360°. У каких многоугольников есть такие углы? Только у правильного шестиугольника, правильного треугольника и квадрата. Это единственные правильные многоугольники, которые можно использовать в качестве плитки. Так как шестиугольник делится на шесть равносторонних треугольников, можно сказать, что существует только две возможности заполнить поверхность правильными многоугольниками: квадратные и треугольные плитки. Именно они и используются чаще всего, мы видим их вокруг — на полу и на стенах.



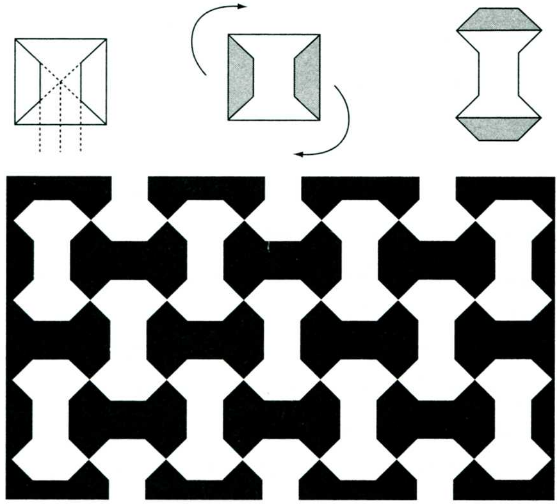
Однако пятиугольники не совсем бесполезны для наших целей. По правде говоря, плитка может быть и в форме пятиугольников, если только они не являются правильными. Например, пятиугольник, образованный квадратом и равносторонним треугольником, лучше всего можно представить в виде открытого конверта. Этот многоугольник является равносторонним — все его стороны одной и той же длины — но углы его не равны. Существует еще 13 видов других неправильных многоугольников, которые также могут быть использованы в качестве плитки. Причина, по которой они редко используются на практике, кроется, вероятно, в их неэстетичности. Хотя форма их геометрически корректна.



Альгамбра — дворец времен династии Насридов, правившей Гранадским эмиратом в южной Испании до его завоевания христианами в 1492 г. Это впечатляющий памятник архитектуры и одна из самых посещаемых достопримечательностей в мире. Если внимательно изучить архитектуру дворца, мы увидим, что в ее основе лежат простые правила.

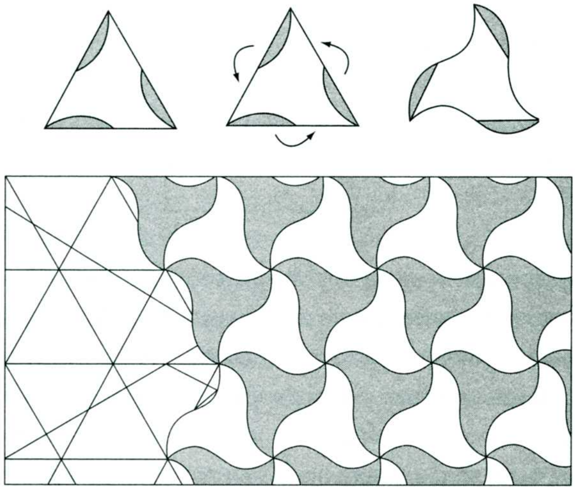
Покажем это на трех типах мозаики. Именно мозаичная плитка и ее повторяющиеся узоры приводят к удивительным результатам. Искусство мавританских художников породило сложные мозаики, которые мы видим вокруг нас.

Первый тип мозаики в Альгамбре называется «кость» или «насридская кость». На рисунке ниже можно увидеть, как она выполняется и какие узоры получаются.



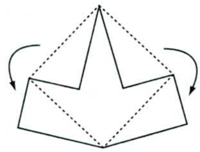
В данном квадрате проведем диагонали, затем разделим основание квадрата на четыре равные части и через эти точки проведем вертикальные линии. Наконец, извлечем полученные трапеции и поместим их над верхней и под нижней сторонами квадрата.

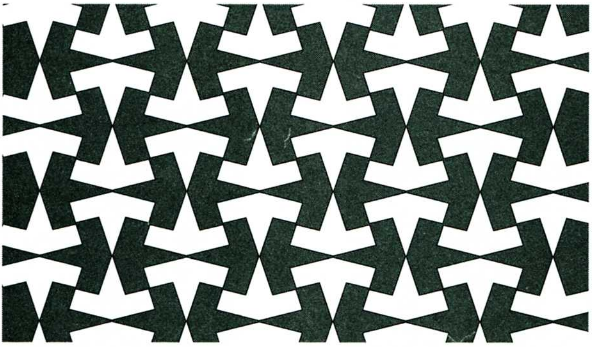
Второй тип — «птичка» — получается из треугольных узоров и часто используется во многих современных мозаиках.



Возьмем равносторонний треугольник и проведем дуги от вершины до середины каждой стороны. Вынем эти сегменты и поместим их на внешней стороне исходного треугольника.

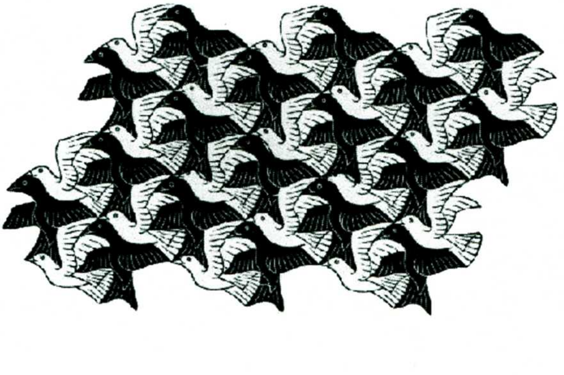
Третий тип мозаики довольно необычен. За основу берутся квадратные плитки, и получается узор в виде «гвоздей».





Внутри квадрата построим два прямоугольных треугольника, гипотенузы которых являются сторонами квадрата. Затем извлечем треугольники и поместим их с внешней стороны смежных сторон.

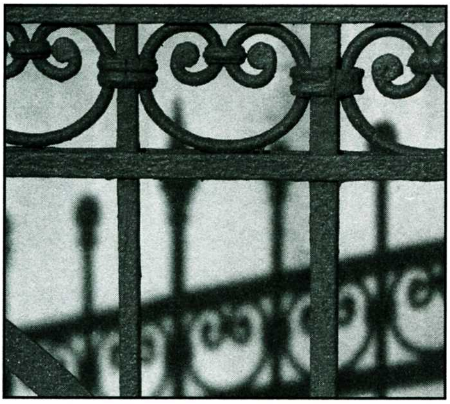
Другие замечательные примеры математических мозаик в искусстве в изобилии встречаются в творчестве нидерландского художника Эшера. Он родился на рубеже XIX и XX веков и уже в юности использовал математику в своих работах. Однако его интерес к мозаике проявился после поездки в Альгамбру в 1936 г.

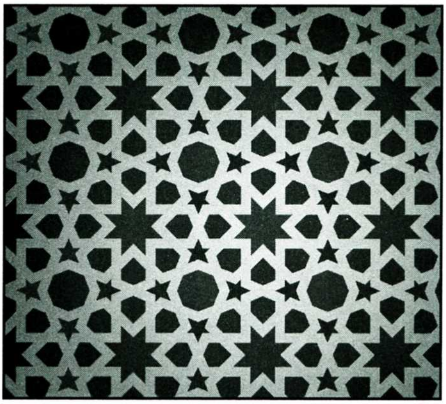


Эта мозаика Эшера использует два узора в виде птиц, которые хотя и не являются геометрическими фигурами, тем не менее заполняют поверхность не оставляя зазоров.

До сих пор мы видели мозаичные узоры (треугольные и квадратные), использующие только один вид плитки, но можно также построить полуправильные мозаики, в которых узором является пара правильных многоугольников, отличающихся друг от друга. Как и прежде, единственное условие — чтобы углы в сумме давали 360°.

Многие дизайны используют повторяющиеся узоры, чтобы покрыть поверхность не оставляя зазоров. Такие узоры встречаются на рисунках на керамике, на решетках окон, на тротуарах и тканях. Они часто используются при вязании, плетении и вышивке.





Узоры на перилах, тканях и в мозаике, как правило, используют повторяющиеся мотивы, чтобы заполнить поверхность. Такие узоры обычно имеют геометрические формы.

СОЗДАЙТЕ СОБСТВЕННУЮ МОЗАИКУ

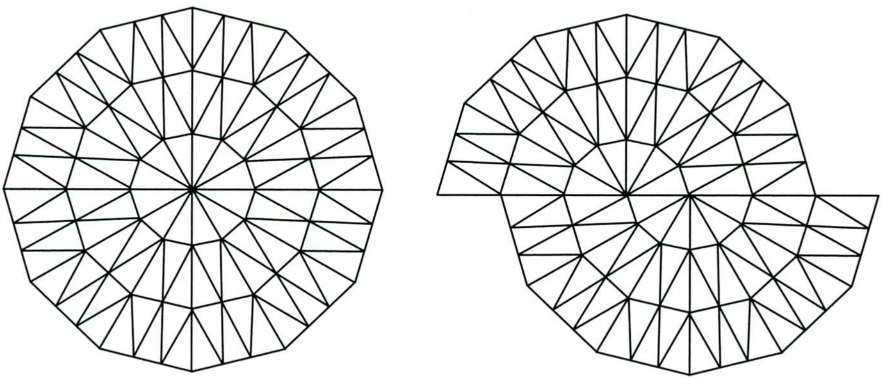
Придумать узоры мозаик, подобные мозаикам дворца Альгамбры, очень сложно, но это может быть интересным упражнением. Недостаточно просто придумать красивый дизайн; любая мозаика основана на математике. Эти примеры могут вдохновить вас на собственные идеи.

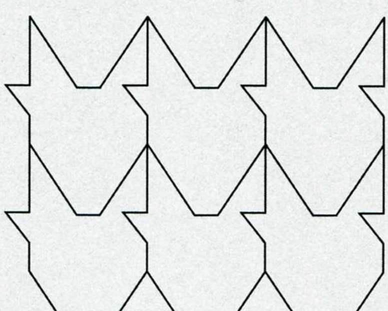
Плиточная мозаика

Мозаика Пенроуза

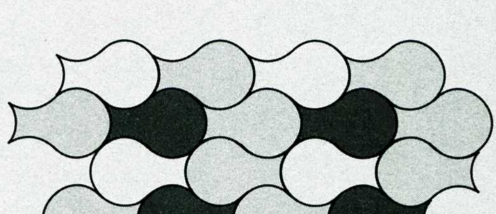
Апериодические мозаики содержат более одного узора, которыми заполняется вся поверхность. Казалось бы, разработка дизайна апериодической мозаики является очень сложной задачей или, по крайней мере, потребует использования многих форм плитки. До 1970-х гг. эта задача была своего рода математической головоломкой.

Первый подход заключается в создании радиальных мозаик. Например, возьмем мозаику из равнобедренных треугольников. Разрезав ее пополам и сдвинув верхнюю половину влево, мы получим апериодическую спираль.



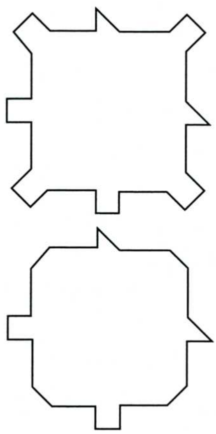


Мозаика с узором быка

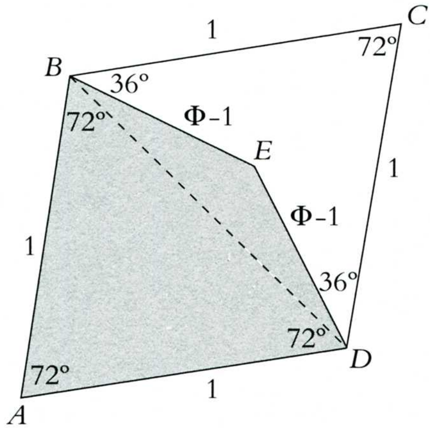


Мозаика с узором вазы

Еще одна проблема заключается в нахождении мозаичных плиток для апериодической мозаики. В течение очень долгого времени математики пытались решить эту проблему, но в результате были найдены лишь узоры, содержащие огромное количество составных элементов. В 1971 г. американский математик Рафаэль Митчел Робинсон разработал дизайн, в котором используются плитки только шести видов, полученных путем добавления выемок и выступов к квадрату.

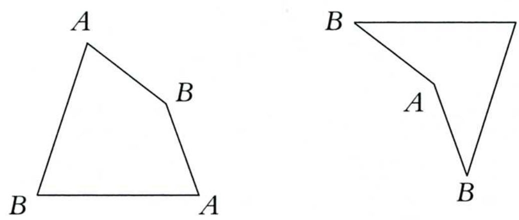


В 1973 г. физику и математику сэру Роджеру Пенроузу (род. в 1931 г.) удалось уменьшить количество плиток до четырех. Год спустя он свел количество к двум. С плитками двух простых типов Пенроуз смог построить апериодическую мозаику. Эти два типа получили названия «воздушный змей» и «дротик». На рисунке это фигуры ABED и BCDE. Вместе они образуют ромб со стороной 1 и углами 72° и 108°. Присутствие Ф вполне закономерно, как и можно было бы ожидать с такими величинами углов.



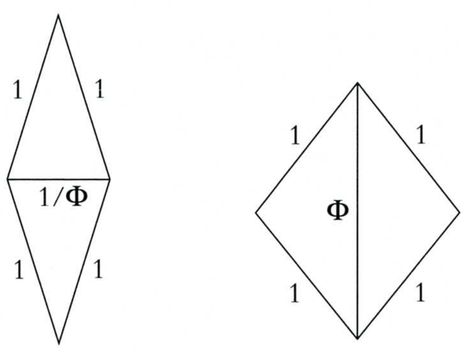
«Воздушный змей» (заштрихованный) состоит из двух «золотых» треугольников, совмещенных по одной из их равных сторон. Таким образом, длины двух больших сторон равны 1, а двух меньших — $\Phi - 1 = 1/\Phi$. Три угла по 72°, а четвертый — 144°. «Дротик» образован двумя «золотыми» гномонами, совмещенными по их меньшей стороне. Это четырехсторонняя вогнутая фигура с формой, дополняющей форму «воздушного змея». Она имеет два угла по 36°, один в 72° и один в 216° (который больше, чем развернутый угол в 180°).

Очевидно, что мы можем построить периодические мозаики с помощью этих двух плиток, если образуем из них ромб. Если мы не хотим повторяющихся узоров, существует другой способ. Обозначим каждую из вершин (например, буквой) и примем условие, что только вершины с одной и той же буквой могут совпадать, когда плитки касаются друг друга.



В каждой «мозаике Пенроуза» отношение числа плиток двух типов стремится к золотому сечению. Казалось бы, нам потребуется больше «дротиков», чем «воздушных змеев», но на самом деле наоборот. «Воздушных змеев» потребуется в Φ раз больше, чем «дротиков».

Пенроуз разработал еще один набор плиток, состоящий из двух ромбов, где первый образован двумя «золотыми» треугольниками, а второй — двумя «золотыми» гномонами.

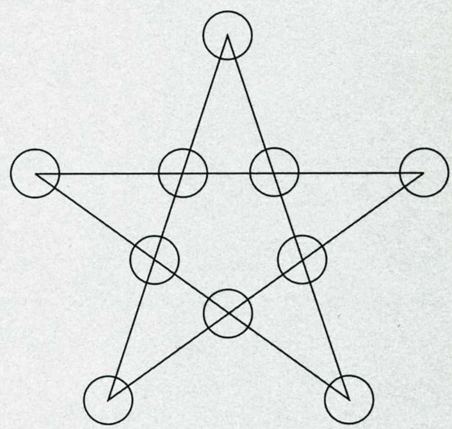


Для построения апериодической мозаики мы должны как-то пометить стороны или вершины этих двух ромбов. В готовой мозаике каждый тип ромбов встречается в соотношении Ф, широкие плитки чаще, чем узкие.

Игры с использованием пятиконечной звезды и золотого сечения

Большинство азартных игр имеют математическую основу, так что не трудно найти игры, связанные с золотым сечением. Кроме того, с древних времен многие игровые доски имеют форму пятиконечной звезды. Так было в Древнем Египте: доска

ЗОЛОТОЕ ГО



Пентальфа, Золотая Звезда, Золотое Го, Грифы и Вороны – лишь несколько из тысяч игр, использующих доску в форме пятиконечной звезды или пентаграммы. Хотя эти игры древние, во многие из них играют и сегодня, и не так трудно найти описание их правил. Мы рассмотрим правила *Пентальфы* из-за ее важного исторического значения и правила *Золотого Го* из-за особой связи с нашей темой. *Пентальфа* – это головоломка для одного игрока, который передвигает фишки с целью разместить девять штук в вершинах пентаграммы: на концах звезды и в пересечениях, которые образуют пятиугольник. Так как таких вершин десять, одна всегда будет оставаться свободной. Фишки перемещаются на три положения за один ход. Первый шаг: мы помещаем фишку в любую свободную вершину; второй шаг: передвигаем фишку на вторую вершину какой-либо линии (не имеет значения, занята эта вершина или свободна); третий шаг: передвигаем фишку на третью вершину этой линии (эта вершина должна быть свободна). Чем больше заполняется доска, тем больше усложняется задача.

В *Золотом Го* мы также используем девять фишек. Они размещаются в вершинах доски, оставляя одну свободной. Каждый игрок, делая ход по очереди, захватывает фишки, как при игре в шашки: прыгая одной фишкой через другую на пустое место за ней. Победителем становится игрок, который захватывает последнюю фишку, оставив на доске только одну.

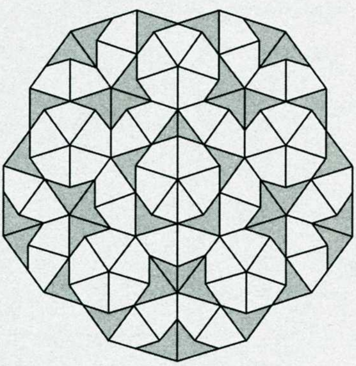
в форме пятиконечной звезды использовалась в одной из старейших настольных игр. В египетском храме Курна были найдены гравюры 1700 г. до н. э. с изображением игры, в которой используется звездообразная доска. Эта игра Пентальфа, вариант которой до сих пор популярен в Греции на Крите.

В математическом смысле интересен вариант другой древней игры, *Ним*, в которой золотое сечение используется в виде последовательности Фибоначчи. Поэтому эта игра также известна под названием «Ним Фибоначчи». Мы начнем с некоторого количества фишек N.

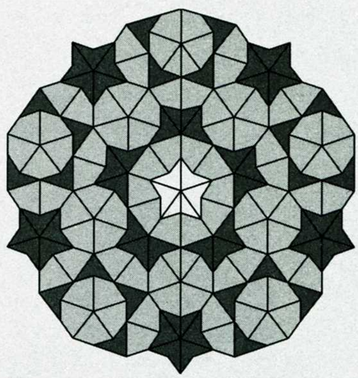
Два игрока по очереди берут фишки из одной кучки. Побеждает игрок, который берет последнюю фишку.

МОЗАИКИ С «ВОЗДУШНЫМИ ЗМЕЯМИ» И «ДРОТИКАМИ»

Существует множество примеров апериодических мозаик, построенных с использованием «воздушных змеев» и «дротиков», придуманных сэром Роджером Пенроузом. Вот некоторые из них.



Солнечная мозаика



Звездная мозаика

Мозаика колеса

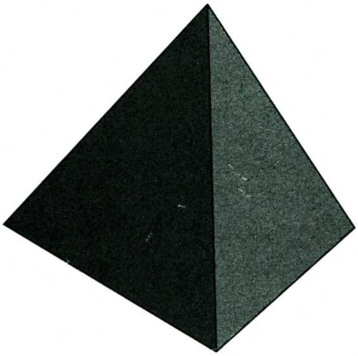
Конечно, за первый ход первый игрок не может взять всю кучку. Во время каждого следующего хода игроки могут брать, сколько захотят, соблюдая следующие правила игры:

- за каждый ход игрок должен брать по крайней мере одну фишку;
- каждый игрок не может брать более, чем удвоенное количество фишек, взятых его противником в предыдущем ходу. (Если один берет четыре фишки, другой в свою очередь может взять максимум восемь.)

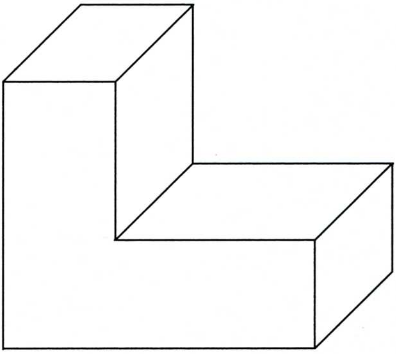
Математический аспект игры заключается в том, что если число N представляет собой число из последовательности Фибоначчи, то второй игрок должен всегда побеждать, если следует правильной стратегии, а если N — любое другое число, то победить должен первый игрок.

Многогранники и золотое сечение

Многогранники — это геометрические тела, каждая грань которых представляет собой многоугольник. Далее подразумевается, что мы всегда рассматриваем выпуклый многогранник — то есть такой многогранник, который лежит по одну сторону от плоскости любой из его граней.



Выпуклый многогранник

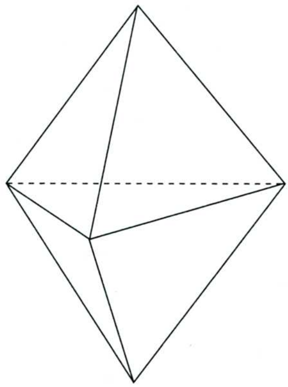


Вогнутый многогранник (две части могут лежать в разных плоскостях)

Для выпуклого многогранника с числом граней F, числом ребер E и числом вершин V всегда справедливо соотношение, известное как теорема Эйлера:

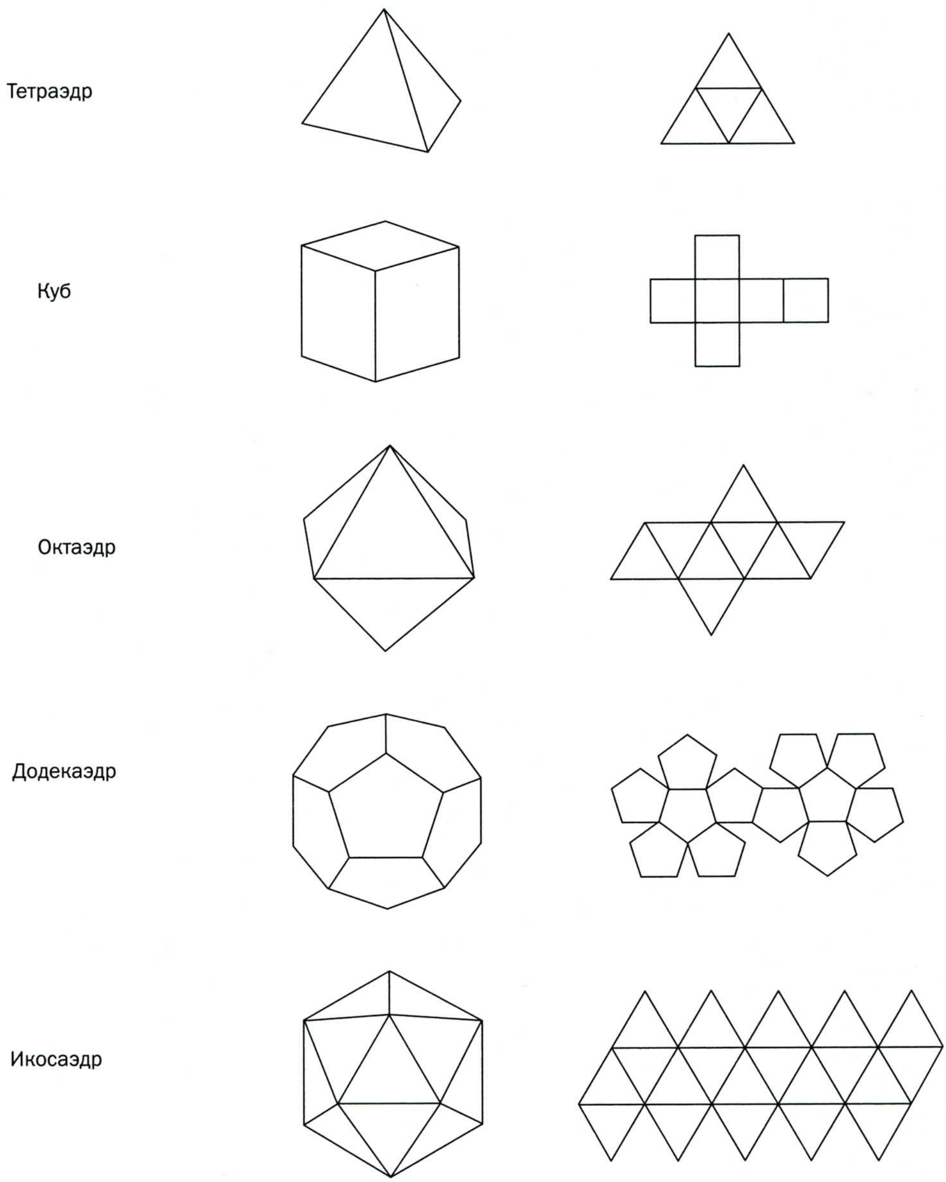
$$F + V = E + 2.$$

Многогранник называется правильным, если все его грани являются равными правильными многоугольниками и из каждой вершины выходит одинаковое количество ребер. Без второго условия мы можем получить многогранник с вершинами с тремя и четырьмя ребрами, как на следующем рисунке:



Кристаллы пирита часто имеют форму правильных двенадцатигранников. Опять же, как мы видим, правильные многогранники в изобилии встречаются в природе.

Как ни удивительно, но уже древние греки знали, что хотя существует бесконечное число правильных многоугольников — они могут иметь любое количество сторон — бывает только пять правильных многогранников, так называемых платоновых тел. Гранями трех из них являются равносторонние треугольники: тетраэдр (четыре грани), октаэдр (восемь граней) и икосаэдр (20 граней). Еще один имеет шесть квадратных граней: куб (или гексаэдр), а пятый, додекаэдр, имеет 12 граней в виде правильных пятиугольников. Все они могут быть вписаны в сферу, касаясь ее всеми вершинами.



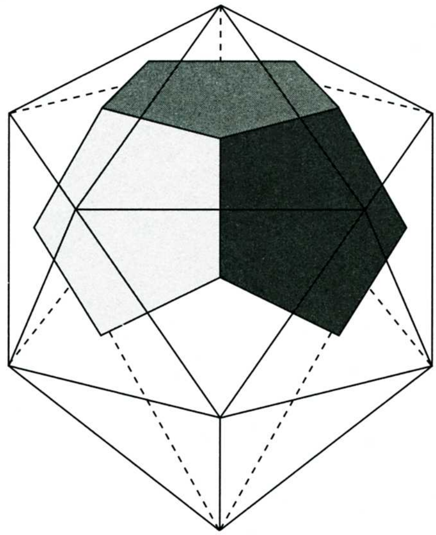
В Древней Греции каждое из этих тел связывали с одной из природных стихий. Куб представляет землю, тетраэдр — огонь, октаэдр — воздух, икосаэдр — воду, а додекаэдр был символом космоса, всей Вселенной. Платон писал: «Боги использовали [додекаэдр], чтобы вплести созвездия в небо».

Большой интерес древних греков, особенно пифагорейцев, к многогранникам, без сомнения, объясняется изучением кристаллических минералов, широко распространенных в Средиземноморье, в том числе эффектных кристаллов пирита, часто имеющих форму додекаэдра.

Количества граней, ребер и вершин пяти правильных многогранников приведены в следующей таблице:

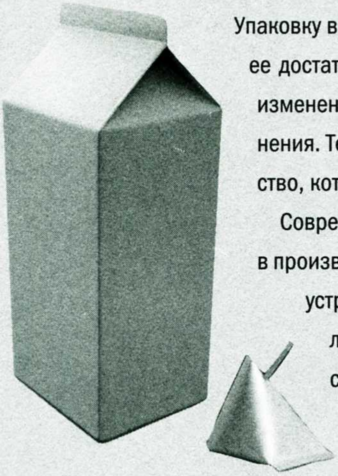
	Число граней	***Число ребер***	***Число вершин***
Тетраэдр	4	6	4
Куб	6	12	8
Октаэдр	8	12	6
Додекаэдр	12	30	20
Икосаэдр	20	30	12

Если мы опишем многогранник вокруг додекаэдра, используя центры его граней в качестве новых вершин, то мы получим икосаэдр.



МНОГОГРАННЫЕ УПАКОВКИ

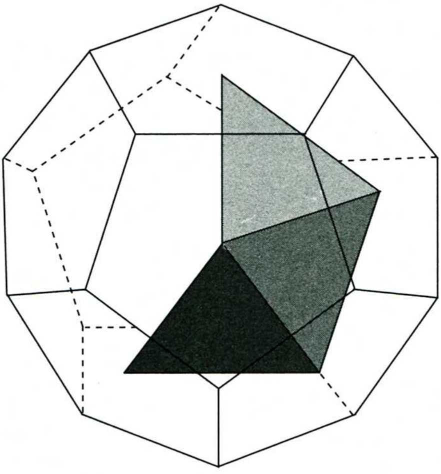
В любом холодильнике найдется много упаковок. Обычная упаковка для жидкостей, таких как молоко или сок, — это коробка фирмы «Тетра Пак». Название предполагает форму тетраэдра, в то время как на самом деле это параллелепипед. Однако оригинальная упаковка «Тетра Пак» действительно была в форме тетраэдра.



Упаковку в форме тетраэдра очень легко и быстро сделать, потому что ее достаточно склеить с двух краев. Но почему же эта форма была изменена, раз она такая идеальная? По причинам перевозки и хранения. Тетраэдры сложно хранить, всегда остается пустое пространство, которое другой тетраэдр не может заполнить.

Современная форма упаковки, параллелепипед, также проста в производстве. Если разобрать одну из них, можно увидеть, как она устроена. Но главным преимуществом использования параллелепипедов является возможность их эффективно хранить: сложенные вместе, они не оставляют пустот.

Если мы проделаем то же самое с икосаэдром, то получим додекаэдр. Из-за такого свойства эти многогранники называют двойственными.



Не все многогранники имеют связь с Φ. Ближайшими к золотому сечению являются додекаэдр (как и следовало ожидать, потому что он образован пятиугольниками) и двойственный ему икосаэдр. Число Φ появляется в выражениях для объема и площади поверхности (суммы площадей граней) этих двух многогранников. С длиной ребра, равной 1, эти выражения имеют вид:

$$\text{Площадь поверхности додекаэдра} = \frac{15\Phi}{\sqrt{3-\Phi}} = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cong 20{,}65.$$

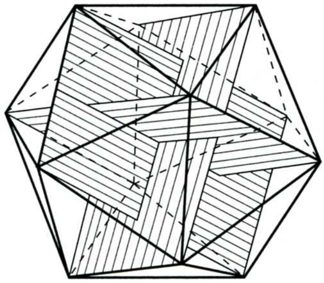
$$\text{Объем додекаэдра} = \frac{5\Phi^2}{6-2\Phi} = \frac{1}{4}(15+7\sqrt{5}) \cong 7{,}66.$$

$$\text{Объем икосаэдра} = \frac{5\Phi^2}{6} = \frac{5}{12}(3+\sqrt{5}) \cong 2{,}18.$$

Если икосаэдр и додекаэдр вписаны один в другой как двойственные тела, соотношение между длинами их ребер задается формулой:

$$\frac{\Phi^2}{\sqrt{5}}.$$

С другой стороны, 12 вершин икосаэдра можно разделить на три группы по четыре вершины, которые являются вершинами «золотых» прямоугольников, вписанных в многогранник, каждый из которых перпендикулярен двум другим.



Поэтому если мы возьмем три равных «золотых» прямоугольника и поместим их перпендикулярно друг к другу так, чтобы они пересекались в их центрах, 12 выступающих вершин образуют икосаэдр с ребром, равным меньшей стороне «золотого» прямоугольника. Если мы примем точку пересечения в «золотых» прямоугольниках за начало координат, то координаты 12 вершин икосаэдра будут выражены следующим образом:

$$(0, \pm 1, \pm\Phi),\ (\pm 1, \pm\Phi, 0),\ (\pm\Phi, 0, \pm 1).$$

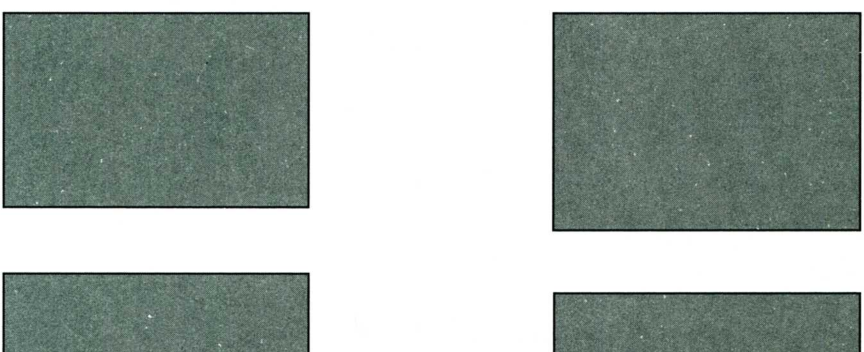
Глава 4

Красота и поиск совершенства в искусстве

В 1876 г. немецкий экспериментальный психолог Густав Теодор Фехнер (1801–1887) провел исследование с людьми, которые не являлись экспертами в искусстве. Он попросил их из нескольких прямоугольников, включая квадрат, выбрать тот, который больше всего приятен глазу. Подавляющее большинство выбрали прямоугольники с «золотым» отношением сторон или другие близкие варианты.

Эксперимент Фехнера очень просто воспроизвести. Надо лишь показать группе людей различные виды прямоугольников. Спросив их, какой они предпочитают, вы получите удивительный результат. Однако специалисты говорят, что и вы тоже должны пройти этот эксперимент. Посмотрите на прямоугольники на этой странице: который из них вам больше всего нравится?

Фехнер также провел тщательные исследования пропорций человеческого тела и пришел к выводу, что «объект считается красивым в отношении формы, если име-



Несколько прямоугольников из эксперимента Фехнера. Какой вам больше всего нравится? На следующей странице вы можете увидеть пропорции каждого из них.

Прямоугольник 16:9 — широкоэкранный телевизор.

Прямоугольник 36:24 — форма фотокарточки.

Прямоугольник с отношением √2 — лист бумаги формата А4.

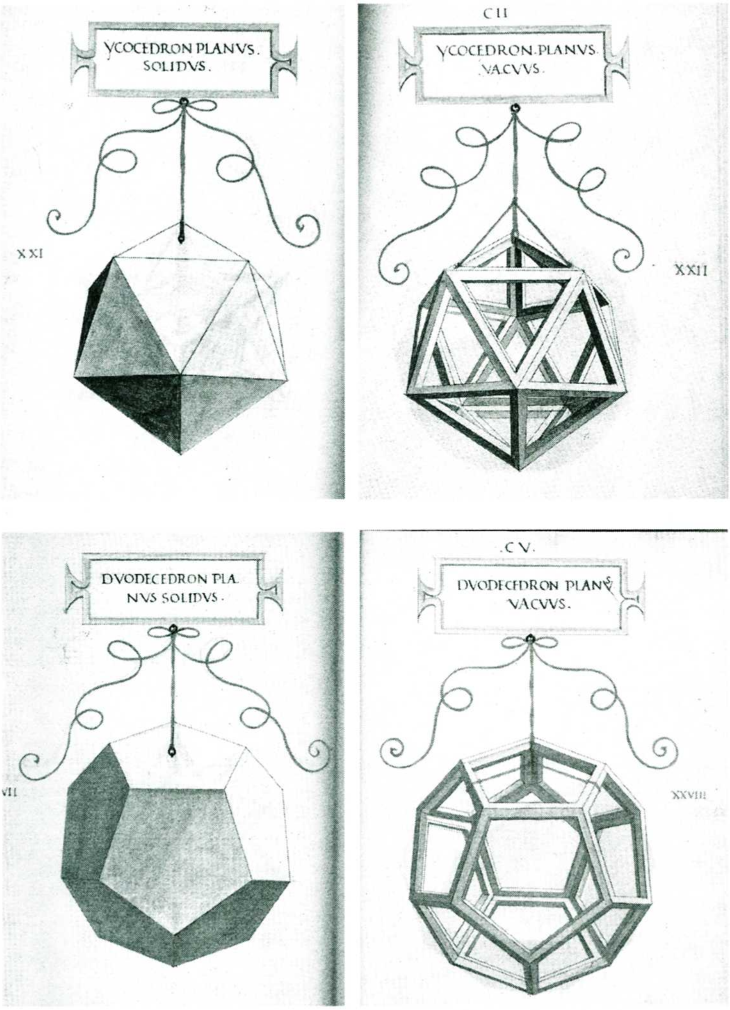
Прямоугольник с форматным отношением Ф — «золотой» прямоугольник.

ет такое же соотношение между меньшей и большей частью, как между большей частью и целым». Это и есть описание золотого сечения. Наука, наконец, подтвердила идею о том, что божественная пропорция обладает внутренней гармонией и красотой.

Однако задолго до этого художники и архитекторы пришли к аналогичному выводу. Золотое сечение уже использовалось в Древней Греции, но его связь с искусством берет начало с эпохи Возрождения и развития направления научной мысли, изучающего творчество.

«О божественной пропорции»

Лука Пачоли вырос в Италии XV века. Именно он и Леонардо да Винчи связали золотое сечение с искусством и представлениями о красоте. Пачоли сделал это в книге De Divina Proportione («О божественной пропорции»), написанной в конце 1498 г. Эта работа была опубликована в Венеции спустя несколько лет, в 1509 г., после того как автор подготовил три рукописи. В окончательном варианте появились особенно интересные для нас главы, в том числе глава De Architectura («Об архитектуре»), которую Пачоли написал, вдохновленный работами римского архитектора Витрувия.



Иллюстрации многогранников, сделанные Леонардо да Винчи (по часовой стрелке начиная с верхнего левого рисунка): сплошной икосаэдр, полый икосаэдр, полый и сплошной додекаэдры.

Книга «О божественной пропорции» установила соотношения, которые должны быть соблюдены для достижения красоты как отражения геометрии. Книга содержала знаменитые рисунки 60 многогранников, сделанные рукой мастера Леонардо да Винчи, и рисунок «Витрувианский человек», иллюстрирующий Ф, который с тех пор цитировался бесчисленное количество раз. Таким образом, в книге имелись теоретические основы для самых влиятельных искусств западной культуры. В Италии наступил Ренессанс, главными двигателями прогресса были свободные мыслители-творцы — художники, архитекторы, математики и философы, которые и положили начало европейской истории искусства.

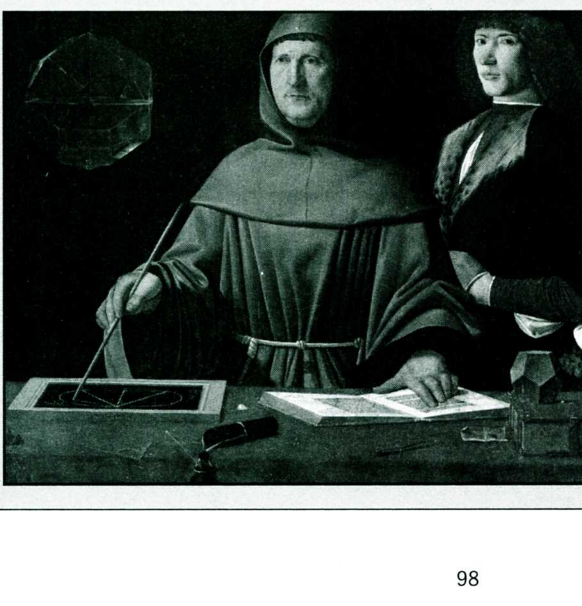
ЛУКА ПАЧОЛИ (1445–1517)

Лука Пачоли родился в 1445 г. в Борго-Сансеполькро, родном городе художника Пьеро делла Франческа (1412–1492), от которого Пачоли получил первые уроки живописи и математики. Пачоли жил и учился в Венеции, а позже по приглашению архитектора Леона Баттисты Альберти (1404–1472) переехал в Рим, где стал францисканским монахом. Он работал профессором математики в различных университетах до принятия приглашения от Лодовико Сфорца из Милана. Именно при дворе герцога произошла случайная встреча, вошедшая в историю: Пачоли познакомился с Леонардо да Винчи. Рисунки многогранников в трактате «О божественной пропорции», скорее всего, сделаны Леонардо.

После оккупации Милана французами Пачоли отправился в путешествие по наиболее важным итальянским университетам (Пиза, Рим, Болонья), где он познакомился со Сципионом дель Ферро (1465–1526), известным итальянским алгебраистом, который вместе с коллегой работал над решением кубических уравнений третьей степени.

«О божественной пропорции» — не единственная работа Пачоли. Его энциклопедический труд Summa de Aritmética, Geometria, Proportioni et Proportionalità («Сумма арифметики, геометрии, дробей, пропорций и пропорциональности»), опубликованный в Венеции в 1494 г., содержит более 600 страниц. В нем Пачоли подчеркивает важность пропорций в архитектуре: «Религиозные службы имеют небольшую ценность, если церковь не была построена в правильной пропорции».

В галерее Каподимонте в Неаполе хранится портрет Луки Пачоли 1495 г., приписываемый Якопо де Барбари. На портрете математик изображен в рясе монаха-францисканца, обучающего евклидовой геометрии благородного юношу (возможно, князя Урбино). Учитель и ученик окружены многогранниками и геометрическими инструментами. Справа от Пачоли висит модель ромбокубоктаэдра, наполовину заполненная водой. Лука Пачоли умер в родном городе в 1517 г.

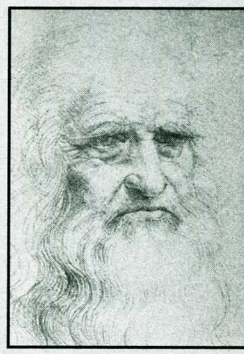


Портрет Луки Пачоли, приписываемый Якопо де Барбари.

Леонардо: золотое совершенство

Леонардо да Винчи (1452—1519) является одним из гениальнейших людей в истории. Его достижения не ограничиваются одной сферой деятельности, а охватывают широкий круг дисциплин: математику, физику, химию, машиностроение, военную технику, живопись, архитектуру и так далее. Уникальность Леонардо состоит в том, что он преуспел во всем, чем занимался, и хотя некоторые его открытия не были оценены при его жизни, рано или поздно все его достижения оказались полезными. Леонардо да Винчи — типичный человек эпохи Возрождения, с разносторонними интересами и умениями. Его слава объясняется не только мощью его интеллекта, но и чертами характера. Другими словами, его образ вышел далеко за пределы той эпохи.

ЛЕГЕНДАРНЫЙ ГЕНИЙ



Леонардо да Винчи. Автопортрет, ок. 1513 г.

Леонардо родился в 1452 г. в городе Винчи, недалеко от Флоренции. Он был внебрачным сыном нотариуса, но воспитывался вместе с другими детьми отца. Леонардо жил в доме отца во Флоренции, пока не стал учеником в мастерской художника Андреа дель Верроккьо. В 1472 г. Леонардо получил должность главного художника. Его первой работой, которую он не закончил (позже завершена Филиппино Липпи), была фреска для ратуши Палаццо Пубблико. В 1486 г., после бурного выяснения отношений с семьей Медичи, правителями города, он переехал в Милан по приглашению герцога Лодовико Сфорца, пожелавшего, чтобы и его город смог достичь культурной славы Флоренции. Служа при дворе герцога, Леонардо написал «Мадонну в гроте» и фреску «Тайная вечеря» в монастыре Санта-Мария делле Грацие.

После свержения Лодовико Сфорца в 1500 г. Леонардо жил в Бергамо, Мантуе и Венеции и наконец вернулся во Флоренцию. Там в 1505 г. он написал самую знаменитую картину: портрет Джоконды (более известный как «Мона Лиза»), наполненный тайной, так как мы даже не знаем, кем является эта женщина, почему она улыбается и что за пейзаж расположен у нее за спиной.

В 1513 г. Леонардо переехал в Рим, где работал для папы Льва X до самой смерти того в 1517 г. Только тогда он принял приглашение короля Франциска I переехать во Францию.

Леонардо умер в 1519 г. в замке Кло-Люсе. Если верить легенде, на его похоронах присутствовал сам король Франции.


TRATTATO
DELLA PITTURA
DI LIONARDO
DA VINCI
NUOVAMENTE DATO IN LUCE, COLLA VITA
DELL' ISTESSO AUTORE,
SCRITTA
DA RAFAELLE DU FRESNE.
Si sono giunti i tre libri della Pittura, ed il trattato della Statua di Leon Battista Alberti, colla Vita del medesimo.
E di nuovo ristampato, corretto, ed a maggior perfezione condotto.
SUB SE OMNIA
IN PARIGI, Appresso Giacomo Langlois, stampatore ordinario del Re Cristianissimo, al Monte S. Genovefa M. DCLI.
Ed IN NAPOLI, Nella stamperia di Francesco Ricciardo M.DCC. XXXIII. A spese di Niccola, e Vincenzo Rispoli.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Обложка «Трактата о живописи», в котором Леонардо изложил взаимосвязи между художественными дисциплинами и математикой.

Его личность была довольно необычной, особенно для того времени. Вегетарианец, левша, якобы гомосексуалист, Леонардо был так поглощен идеей непрерывного прогресса, что нисколько не колебался, когда во время экспериментов приходилось нарушать закон. Он был окружен тайной: писал с использованием шифра, его рукописи можно прочитать лишь в зеркальном отражении, его работы полны загадок. Например, знаменитая «Мона Лиза» до сих пор ставит в тупик многих экспертов.

Рисунки и рукописи Леонардо собраны в десяти компиляциях, хранящихся в различных европейских музеях. Одна из них находится в частной коллекции американского предпринимателя Билла Гейтса, который заплатил за нее несколько миллионов долларов. Если ввести имя Леонардо да Винчи в любой поисковой системе в интернете, будут найдены миллионы упоминаний о нем.

Леонардо был также теоретиком живописи и твердым сторонником ее единства с математикой. Его работа «Трактат о живописи» начинается с фразы: «Пусть никто, не будучи математиком, не дерзнет читать мои труды». Этот трактат был написан около 1498 г., но опубликован лишь полстолетия спустя.

Леонардо лишь делал иллюстрации к работе «О божественной пропорции», но сам Пачоли упоминал о важности вклада в науку своего гениального друга: «Пирамиды в этой книге, как и другие фигуры, сделаны рукой моего вышеупомянутого соотечественника Леонардо да Винчи из Флоренции, которого еще ни один человек не превзошел в искусстве рисования». Эти рисунки вместе с «Витрувианским человеком» в настоящее время являются характерным символом того образа мышления, который соединяет художественный и научный подход: гуманистического идеала.

Леонардо применил научные знания о пропорциях человеческого тела к теориям Пачоли и Витрувия о красоте. На рисунке «Витрувианский человек» мужская фигура, вписанная в круг и в квадрат, помещена в центре Вселенной. Изображение соответствует рекомендациям Витрувия (Марк Витрувий Поллион), архитектора при Юлии Цезаре, жившем в I в. до н. э. Римский архитектор, инженер и писатель снова стал популярен в эпоху Возрождения в связи с переводом его работ в 1486 г. В последующие десятилетия многие труды Витрувия были опубликованы во всех крупных итальянских городах. Идеи Витрувия использовались в архитектуре Ренессанса в качестве новейших тенденций, и Леонардо часто признавался, что Рим был его главным вдохновением.

Витрувий вывел пропорции человеческой фигуры из простых наблюдений. Он утверждал, что рост человека равен размаху рук, и если мужчина, лежащий на спине,

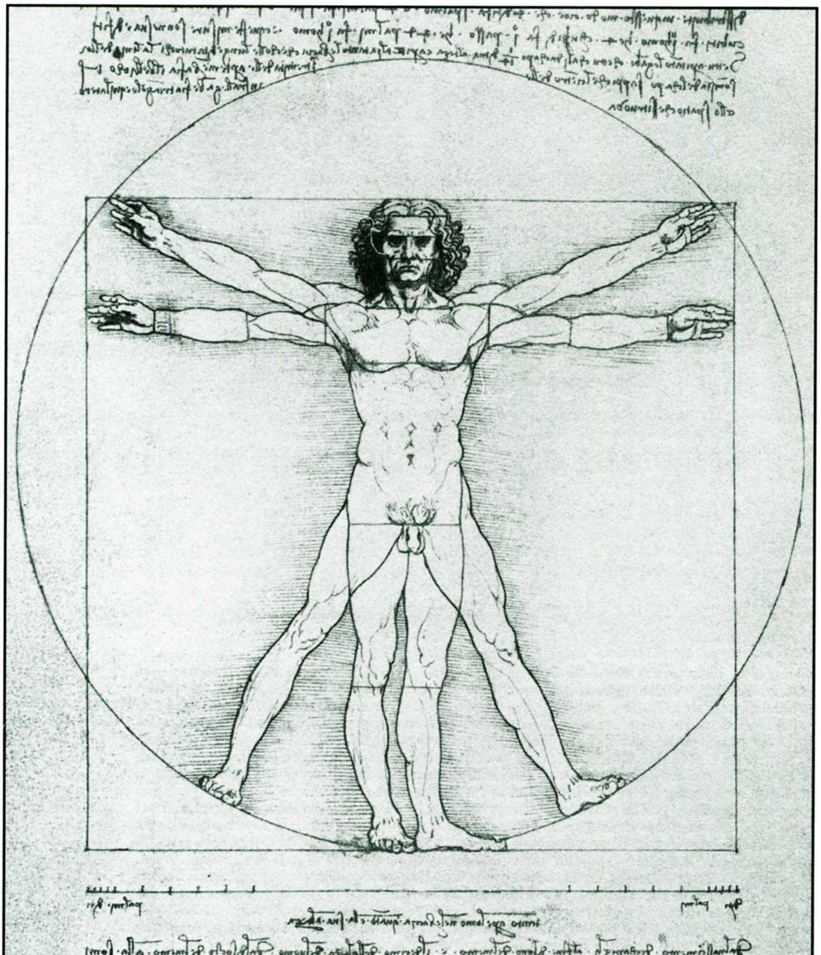


Рисунок «Витрувианский человек», в настоящее время хранящийся в коллекции галереи Академии в Венеции, показывает идеальные пропорции человеческого тела, связанные геометрическими пропорциями квадрата и круга. Отношение между стороной квадрата и радиусом окружности является «золотым».

разведет в стороны руки и ноги, то его фигура будет вписана в окружность. Многие художники пытались изобразить на одной иллюстрации эти формы человеческой фигуры, вписанной в квадрат и в круг. Леонардо нашел оригинальное и изящное решение, основанное на том, что квадрат и круг имеют разные центры. Гениталии человека являются центром квадрата, а пупок — центром круга. Идеальные пропорции человеческого тела на таком изображении соответствуют отношению между стороной квадрата и радиусом круга: золотому сечению. Так благодаря золотому сечению геометрия соединила искусство и красоту.

Идеальные пропорции

«Витрувианский человек» представляет собой приблизительные пропорции тела обычного взрослого человека, которые со времен Древней Греции использовались в качестве художественного канона для изображения человека. Пропорции сформулированы следующим образом:

Рост человека = размаху рук (расстоянию между кончиками пальцев разведенных в стороны рук) = 8 ладоням = 6 ступням = 8 лицам = 1,618, умноженному на высоту пупка (расстояние от пупка до земли).

Наконец-то мы добрались до соотношения 1,618, что является приблизительным значением Ф. При проверке этих пропорций на наших телах мы, несомненно, весьма расстроимся. Оказывается, трудно соответствовать идеалу. В конце концов, это пропорции идеальной красоты.

Существует еще один способ подтвердить идеальный канон красоты: с помощью статистики. Если сравнить пропорции значительного количества людей с идеальными пропорциями, то окажется, что средние значения всех измерений довольно близки к канонам красоты: человек идеален только при подсчете среднего арифметического. Бельгийский математик Ламбер Адольф Кетле (1796–1874) является одним из отцов современной статистики. В 1871 г. его исследования пропорций тел жителей Европы полностью подтвердили идеальные пропорции.

В этой связи возникает ряд интересных вопросов. Какие пропорции используются в качестве канонов красоты в неевропейских культурах, таких как индийская, африканская и китайская?

ЧЕЛОВЕЧЕСКАЯ ШКАЛА ИЗМЕРЕНИЙ

До того как метрическая система упростила измерения, обычно использовались единицы длины, связанные с частями человеческого тела: ступнями, ладонями, пальцами и так далее. Такие единицы длины соответствовали длине реальной части тела. Дюйм произошел от длины большого пальца и равнялся 1/12 длины стопы.

Но не все люди имеют одинаковые размеры ног. Откуда же появился стандарт «универсальной ступни»? Стандартные размеры были взяты у выдающихся современников. Например, ярд, единица длины, до сих пор используемая в Соединенных Штатах Америки и в Великобритании, был определен английским королем Генрихом I в XII веке как расстояние между кончиком его носа и большим пальцем вытянутой руки. Единица длины фут была определена как 1/3 этой длины.

Конечно, красота является идеалом во всех культурах, но одинаков ли он? Исследования пропорций человеческого тела в различных странах и культурах показали, что этот идеал один и тот же.

Золотое сечение в живописи

В эпоху Возрождения использование перспективы и поиск идеальных пропорций свели художников и ученых вместе. Подобно тому, как математики изучали соотношения перспективы, художники использовали проективную геометрию, чтобы изображать реалистичные трехмерные сцены. В этих нововведениях наряду с Рафаэлем и Дюрером ключевую роль играл Леонардо да Винчи.

В 1435 г. появился «Трактат о живописи» Леона Баттисты Альберти, его важнейшая работа о перспективе, где он изложил методы изображения реальных объектов. Идеи ученого оказались поворотными, как видно из следующих крылатых фраз: «Первое требование для художника — это знание геометрии» и «Картина является открытым окном, через которое мы видим изображаемый объект».

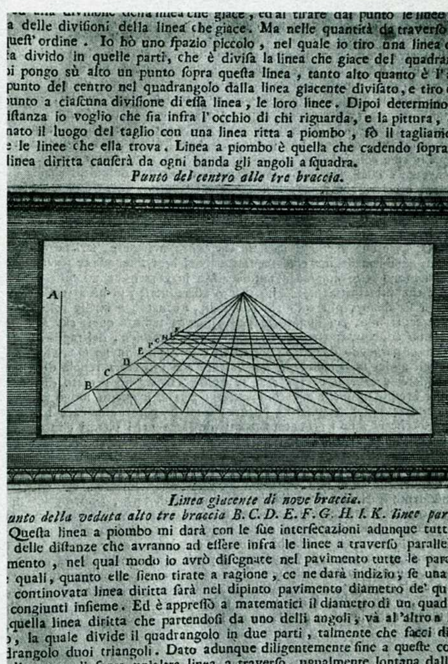
Альберти был поглощен поиском теоретических и практических правил, определяющих работу художников, поэтому его трактаты наполнены конкретными темами. Трактат «О скульптуре» он посвятил пропорциям человеческого тела, в трактате «О живописи» он сформулировал первое научное определение перспективы, а в «Десяти книгах о зодчестве» описал свою концепцию современной архитектуры, основанную на золотой пропорции.

ЛЕОН БАТТИСТА АЛЬБЕРТИ (1404–1472)

Альберти родился в Генуе в 1404 г., во времена расцвета таланта Брунеллески. Альберти был внебрачным сыном богатого флорентийского купца и банкира, который был выслан из Тосканы по политическим мотивам.

Альберти — истинный человек Возрождения: он посвятил себя, главным образом, архитектуре, математике, поэзии, но изучал также лингвистику, философию, музыку и даже археологию. Представитель второго поколения художников эпохи Возрождения, он стал одним из ее символов. По его мнению, «художник не может быть простым ремесленником, но интеллектуалом, получившим образование по всем дисциплинам и во всех областях». Альберти работал архитектором у известного купца и гуманиста Джованни Ручеллаи, для которого он спроектировал часть фасада флорентийской церкви Санта-Мария-Новелла на основе золотой пропорции. Его работы относятся к числу величайших в истории архитектуры, например, Палаццо Ручеллаи и вилла Медичи.

Когда Альберти умер в 1472 г. в Риме, прожив насыщенную жизнь, он оставил после себя бессмертные произведения и блестящие идеи. К счастью, его было кому заменить: на момент смерти Альберти молодому Леонардо да Винчи было 20 лет.



a delle diviſioni della linea che giace. Ma nelle quantità da traverſo
queſt' ordine. Io hò uno ſpazio piccolo, nel quale io tiro una linea di
ta divido in quelle parti, che è diviſa la linea che giace del quadran
oi pongo sù alto un punto ſopra queſta linea, tanto alto quanto è l'al
punto del centro nel quadrangolo dalla linea giacente diviſato, e tiro di
unto a ciaſcuna diviſione di eſſa linea, le loro linee. Dipoi determino
iſtanza io voglio che ſia infra l'occhio di chi riguarda, e la pittura, e
nato il luogo del taglio con una linea ritta a piombo, fò il tagliamen
e le linee che ella trova. Linea a piombo è quella che cadendo ſopra
linea diritta cauſerà da ogni banda gli angoli a ſquadra.

Punto del centro alle tre braccia.

Linea giacente di nove braccia.

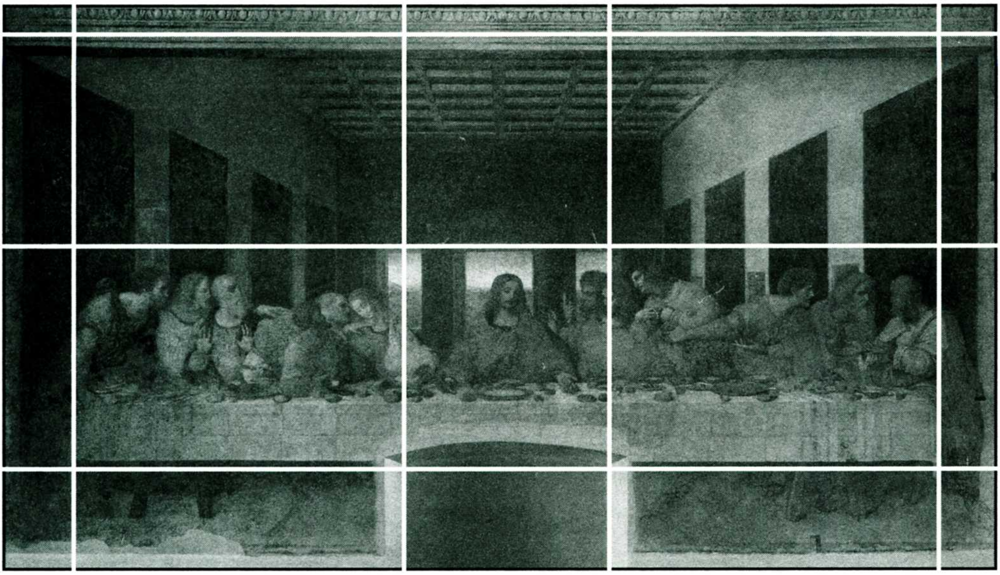
unto della veduta alto tre braccia B. C. D. E. F. G. H. I. K. linee para.

Queſta linea a piombo mi darà con le ſue interſecazioni adunque tutti
delle diſtanze che avranno ad eſſere infra le linee a traverſo parallele
mento, nel qual modo io avrò diſegnate nel pavimento tutte le paral
quali, quanto elle ſieno tirate a ragione, ce ne darà indizio; ſe una n
continovata linea diritta ſarà nel dipinto pavimento diametro de' qua
congiunti inſieme. Ed è appreſſo a matematici il diametro di un quadr
quella linea diritta che partendoſi da uno delli angoli, và al'altro a lu
, la quale divide il quadrangolo in due parti, talmente che facci di
drangolo duoi triangoli. Dato adunque diligentemente fine a queſte coſ
di nuovo di ſopra un'altra linea a traverſo, ugualmente lontana dalle

Вверху: на знаменитой фреске в капелле Бранкаччи Мазаччо изобразил (слева направо) Мазолино, себя (смотрящего на нас), Леона Баттисту Альберти и Брунеллески. Справа: страница из первой книги «Трактата о живописи» Леона Баттисты Альберти (издание 1733 г. с гравюрами Франческо Сесони).

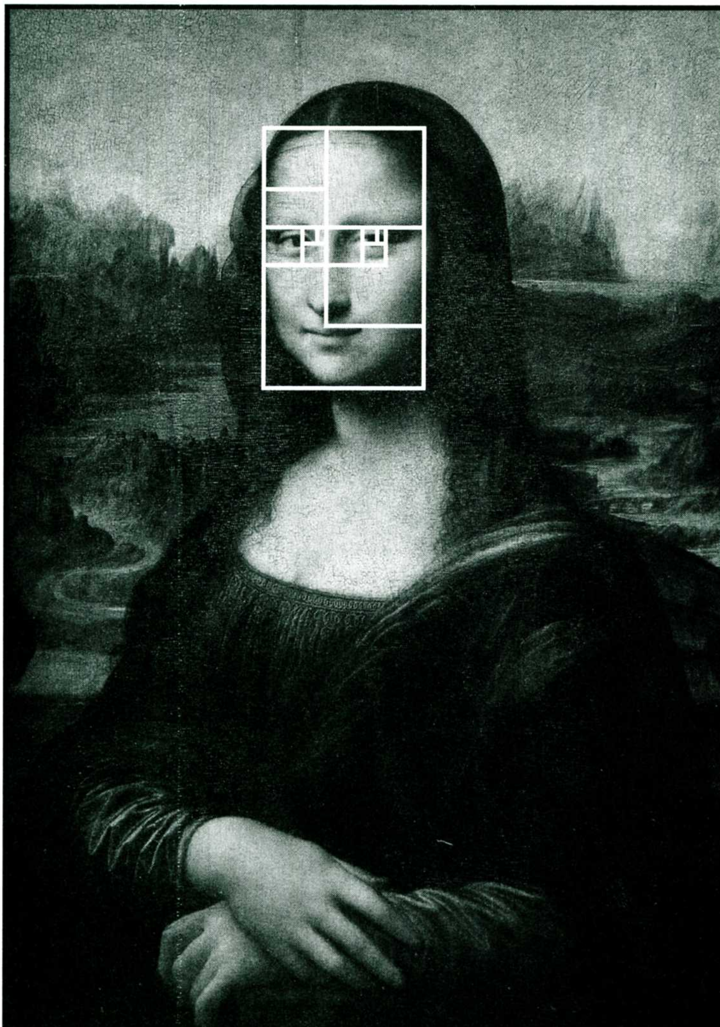
Леонардо да Винчи продолжил изучение перспективы; эта тема при его жизни была очень популярна. Великий гений говорил: «Перспектива есть руль живописи». Влияние Леонардо легко прослеживается в работах многих его последователей, в частности, Альбрехта Дюрера, который также интересовался научными основами живописи. Хотя у нас нет прямых свидетельств того, что Леонардо использовал золотое сечение, композиции его работ, таких как «Тайная Вечеря», содержат поразительное множество золотых пропорций, особенно «золотые» прямоугольники.

В «Тайной Вечере» «золотые» прямоугольники определяют как размеры картины, так и положение Христа и Его учеников. Также можно заметить, что стены комнаты и окна на заднем плане следуют правилу золотого сечения.

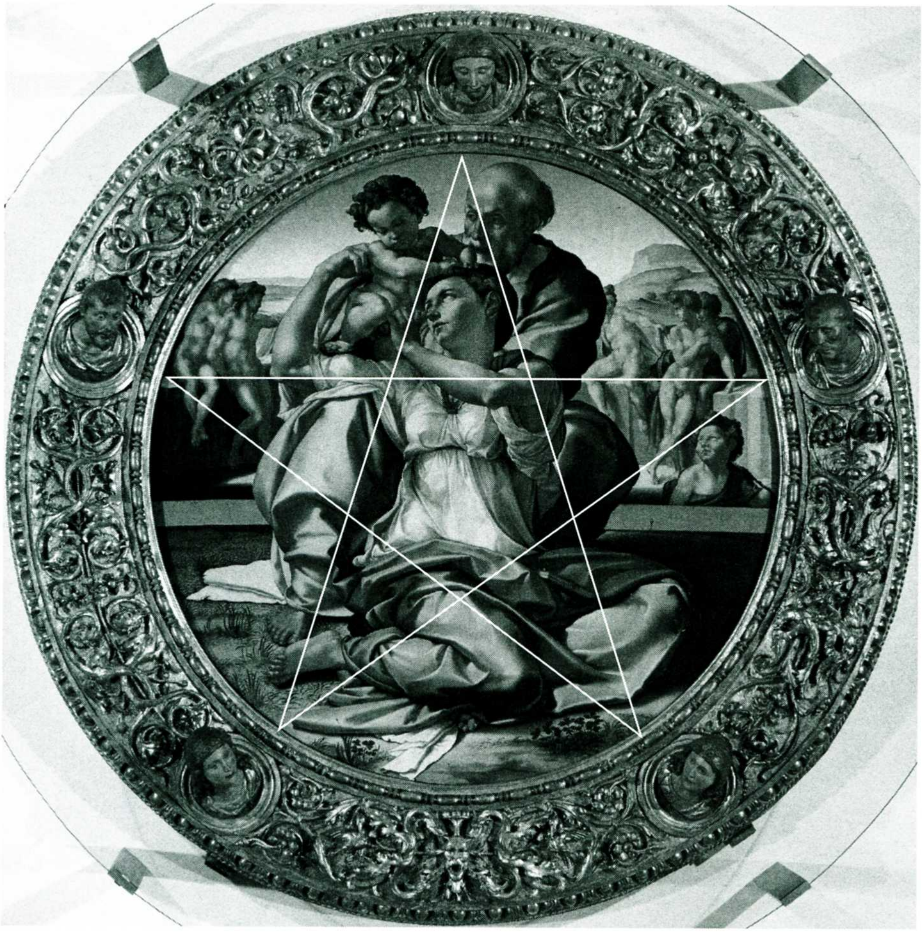


Композиционные элементы картины Леонардо «Тайная вечеря» содержат золотые пропорции.

Даже портрет Моны Лизы построен на золотом сечении. Исследования показали, что ее лицо и в целом, и в деталях обрамлено элегантной последовательностью «золотых» прямоугольников разных размеров.

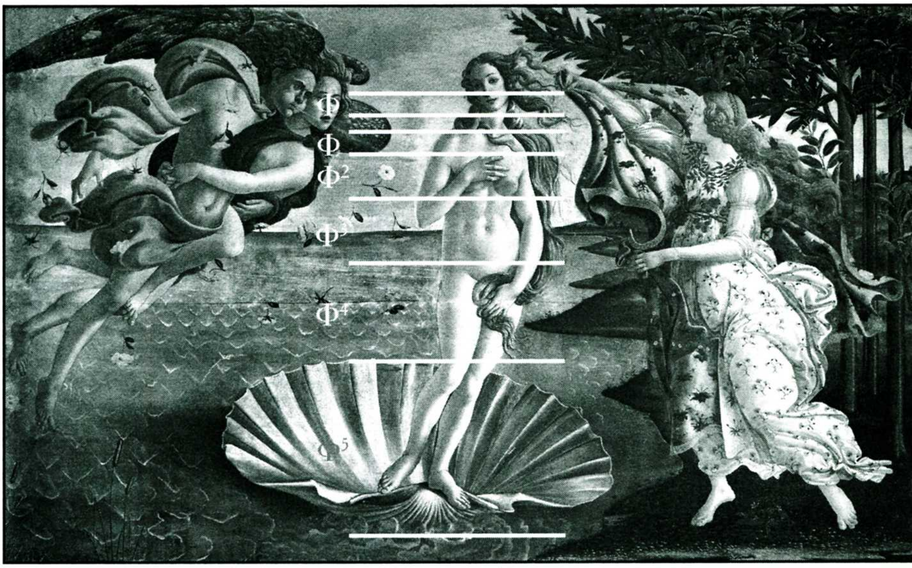


«Золотые» прямоугольники, обрамляющие лицо Моны Лизы.



Пятиконечная звезда явно лежит в основе композиции «Святого семейства» Микеланджело.

Другими словами, художники Ренессанса пусть неосознанно, но находились под влиянием золотого сечения, используя в своих композициях «золотые» прямоугольники. Символ пентаграммы помогал им в определении пространства картины, например, в расположении человеческих фигур. «Золотая» спираль применялась для тех же целей. «Святое семейство» Микеланджело (см. выше) является примером того, как для этой цели служила пятиконечная звезда. Присутствие Ф в «Бичевании Христа» Пьеро делла Франчески и в «Рождении Венеры» Сандро Боттичелли — один из секретов этих необычайно красивых картин. Открытие тайной геометрии в этих работах лишь усиливает удовольствие от их просмотра.

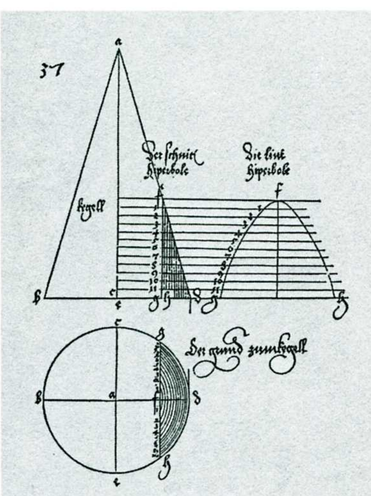


Горизонтальные линии отмечают золотые пропорции, используемые Сандро Боттичелли в «Рождении Венеры» (Φ, Φ, Φ^2, Φ^3, Φ^4, Φ^5).

Самым выдающимся последователем идей Леонардо был Альбрехт Дюрер. В 1525 г. он опубликовал на немецком языке первую книгу по математике «Руководство к измерению циркулем и линейкой», более известную под названием «Об измерениях». В ней художник и математик изложил свою философию красоты:

«Красота заключается в гармонии частей друг с другом и с целым... Подобно тому, как каждая часть сама по себе должна быть изображена правильным образом, так же композиция частей должна создавать гармонию целого... потому что гармоничные элементы считаются красивыми».

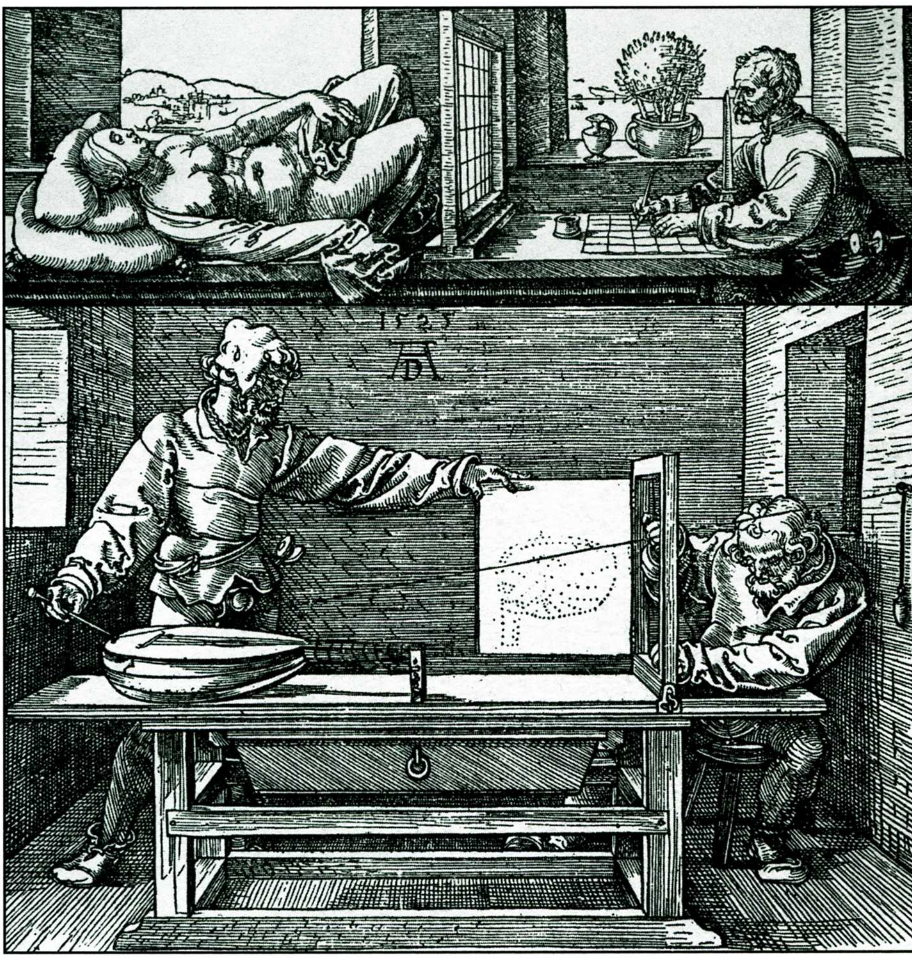
В книге «Об измерениях» описывается построение многих кривых, таких как конхоида, архимедова спираль и спираль на основе золотого сечения, известная в то время как спираль Дюрера. В книге предлагаются некоторые точные (и приближенные) методы построения правиль-



Построение конического сечения и параболы из книги «Об измерениях».

ных многоугольников. Дюрер также рассматривает пирамиды, цилиндры и другие тела, описывает пять платоновых тел и полуправильные архимедовы тела. Он не забыл о построениях конических сечений, таких как парабола. В целом его работа может рассматриваться как начала начертательной геометрии.

Наконец, книга содержит введение в теорию перспективы. Дюрер создал много гравюр, на которых продемонстрировал методы построения модели в перспективе.

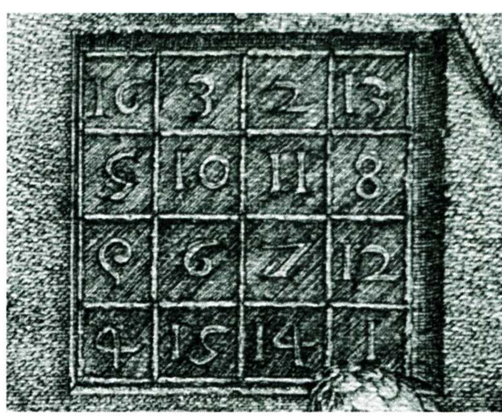


Две гравюры Дюрера, демонстрирующие его методы построения перспективы.

АЛЬБРЕХТ ДЮРЕР (1471–1528)

Дюрер родился в 1471 г. в Нюрнберге, где он обучался живописи и гравированию. Получая образование, он путешествовал по Германии, а в 1494 г. посетил Венецию, где познакомился с математическими работами Пачоли. На следующий год он открыл собственную мастерскую в родном городе. Кроме живописи Дюрер тщательно изучал математику. Он жил в Италии с 1505 по 1507 гг., где больше занимался математикой, чем живописью, потому что уже был непревзойденным художником. В 1512 г. он был назначен художником при дворе императора Максимилиана I. Император Карл V продлил это назначение в 1520 г. Кроме книги «Об измерениях» Дюрер также написал «Четыре книги о пропорциях».

Среди гравюр художника самой известной, возможно, является «Меланхолия I» (внизу слева). На ней особенно видно мастерство Дюрера при изображении различных объектов в перспективе, в частности, ромбоэдра в левой части гравюры. В правой части изображен магический квадрат, состоящий из чисел, сумма которых в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях всегда постоянна. Квадрат также содержит дату работы — 1514.



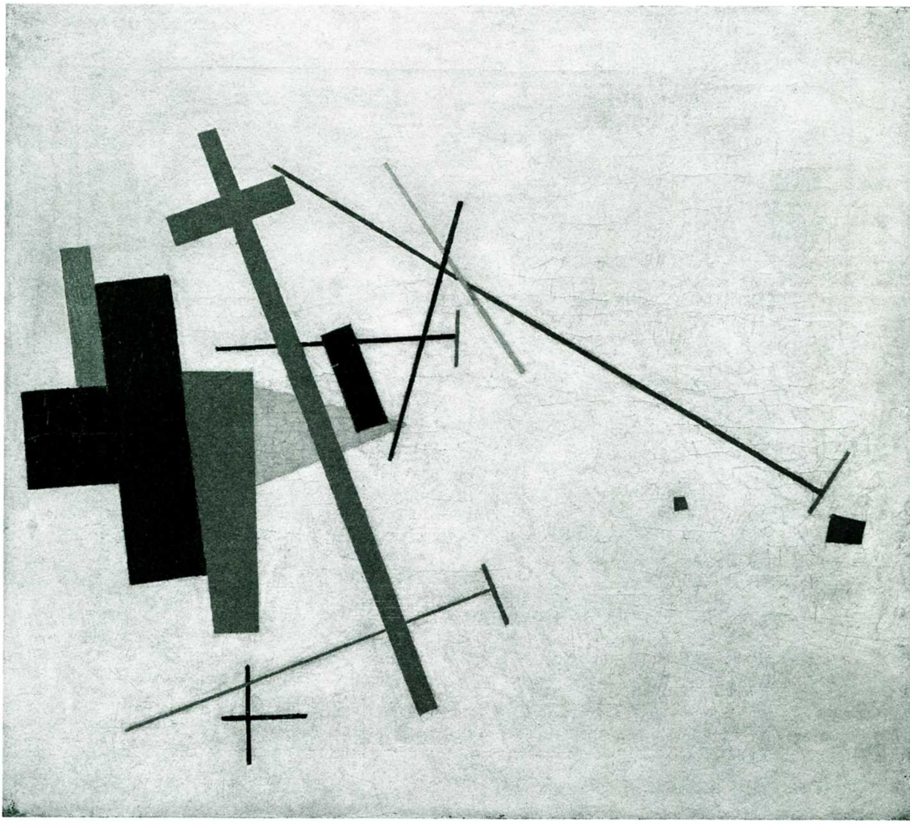
«Меланхолия I» и ее фрагмент, магический квадрат, показывающие тесную связь работ Дюрера и его математических знаний.

Пройдет несколько веков, прежде чем связь искусства и математики проявится с той же силой. Это произойдет в начале XX века во время расцвета абстрактного искусства. Искусствоведы Люси Адельман и Майкл Комптон так писали об этом периоде: «Прежде всего, был особый интерес к неевклидовой и многомерной геометрии... этот период означал поражение перспективы и ее замещение другими менее систематическими канонами. Художники использовали координатные сетки, как при изображении геометрических фигур, что было связано с идеей сведения живописи к отдельным элементам. Фигуры, извлеченные из математических текстов, нередко появлялись в картинах... Наконец, простые геометрические фигуры часто представлялись машинами и их продукцией и символизировали таким образом прогресс и современность».

Это был момент бурного творческого роста обеих дисциплин. В 1912 г. швейцарский художник и скульптор Макс Билл произнес революционные слова: «Новая концепция возникла, вероятно, благодаря Кандинскому, который в книге Über das Geistige in der Kunst («О духовном в искусстве») выдвинул идею того, что в искусстве воображение художника будет постепенно заменено математическими представлениями».

АНАМОРФНЫЙ ЧЕРЕП

Анаморфоз — это такой эффект, когда объект становится различимым при взгляде из определенной точки или с помощью устройства, которое меняет направление взгляда наблюдателя. Наиболее известным примером является картина Ганса Гольбейна «Послы» (справа). В нижней части картины изображен искаженный череп, который можно увидеть в правильной перспективе, если смотреть на него справа с близкого расстояния.



«Супрематическая композиция» 1915 г. Казимира Малевича. Художники-абстракционисты также начали с геометрии, и золотое сечение встречается во многих композициях.

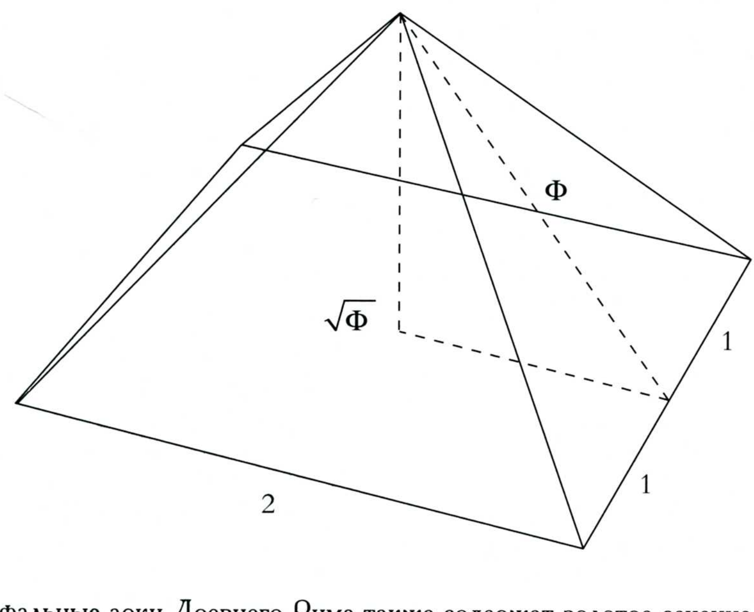
Пит Мондриан определил изменения следующим образом: «Неопластицизм имеет свои корни в кубизме. Он также может быть назван «живописью реальной абстракции», потому что абстрактное (как, например, математика, но без достижения абсолюта) может быть выражено через пластическую реальность в живописи. Именно сочетание цветных прямоугольных плоскостей выражает более глубокую реальность, которая доходит до нас через пластические связи, а не через естественный внешний вид... Неопластицизм придает этим отношениям эстетический баланс и таким образом выражает новую гармонию».

Макс Билл определил этот новый способ понимания искусства так: «Математические концепции искусства не являются математикой в строгом смысле этого слова. Можно даже сказать, что было бы трудно в этом методе применить то, что мы понимаем под точной математикой. Это, скорее, сочетание ритмов и связей, законов, имеющих личную природу, в том же смысле, что и математика имеет свои инновационные элементы, рожденные умами ее первопроходцев».

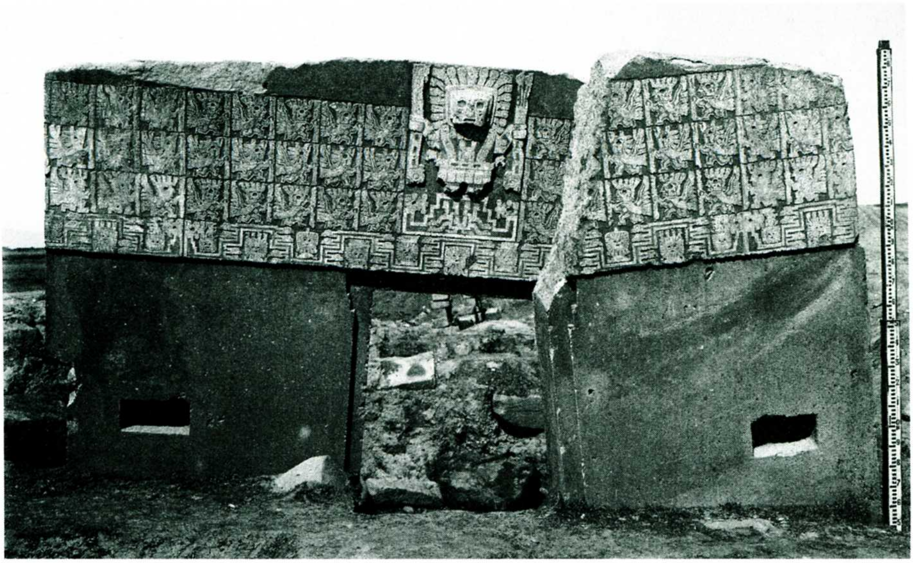
Многие известные художники XX века имели сильные связи с математикой: она являлась основой многих их фундаментальных работ или использовалась как источник вдохновения. Тут нельзя не вспомнить вездесущего Эшера, одного из самых популярных художников прошлого века, а также целые движения, такие как супрематизм и кубизм. Ответвлением кубизма стало «Золотое сечение» — направление, основанное на идее поиска универсальных форм. Свой вклад в «Золотое сечение» внес Марсель Дюшан, а также его знаменитые последователи Ле Корбюзье, Хуан Грис и Фернан Леже.

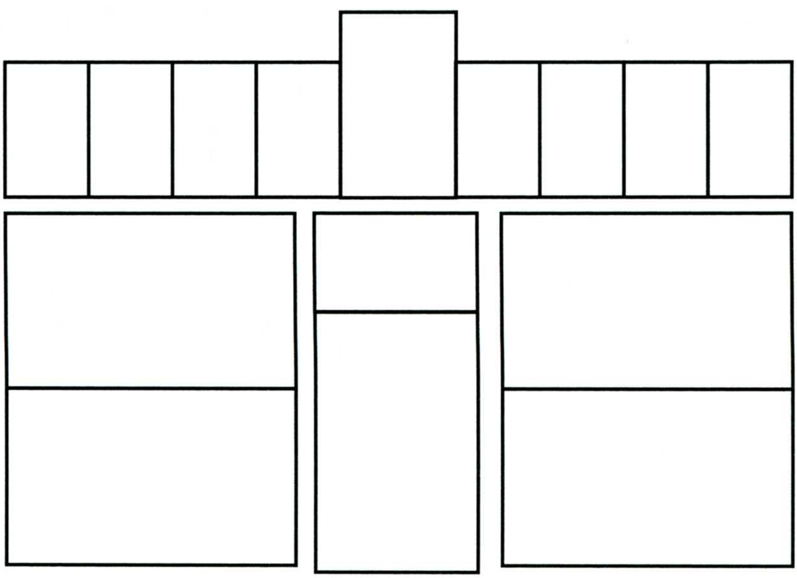
Золотое сечение и архитектура

Золотое сечение встречается в архитектуре со времен древних египтян, хотя мы не можем с уверенностью сказать, что такие пропорции использовались умышленно. Например, высота и основание Великой Пирамиды имеют непосредственное отношение к Ф.



Триумфальные арки Древнего Рима также содержат золотое сечение, как и ликийские гробницы, и храмы древнего города Миры (ныне город Демре в Турции). Другие цивилизации, далекие от классической культуры, похоже, тоже ценили золотые пропорции. Рядом с озером Титикака, недалеко от Ла-Паса, столицы Боливии, находятся Врата Солнца — каменная арка доинковской эпохи с пропорциями, которые полностью диктуются золотым сечением.





Врата Солнца в Боливии в настоящее время в значительной степени разрушены. Размеры сооружения, похоже, основаны на «золотых» прямоугольниках. Время постройки датируется примерно 1500 г. до н. э.

Как уже говорилось в первой главе, из всех архитектурных творений древнего мира лучше других эффект золотого сечения иллюстрирует именно Парфенон. Современное название золотого сечения, *фи*, происходит от имени Фидия, творца этого древнего чуда.

Парфенон в Афинах традиционно считается ярким примером использования золотого сечения в архитектуре, хотя точные измерения не подтверждают эту теорию.

Конечно, крайнее и среднее отношение часто использовалось в греческой культуре, но точные измерения выявили на удивление много неточностей, вызвавших подозрение многих экспертов. Может быть, людям лишь хотелось увидеть золотое сечение в пропорциях Парфенона, в то время как его строители использовали совсем другие соотношения? Мы всегда можем насчитать 666 шагов по лестнице или 666 дюймов между какими-то двумя точками и тут же объявить это знаком дьявола. Точно так же, проделав соответствующие измерения в любом здании, мы почти всегда можем найти Ф как отношение каких-то размеров, хотя архитектор даже не думал об этом.

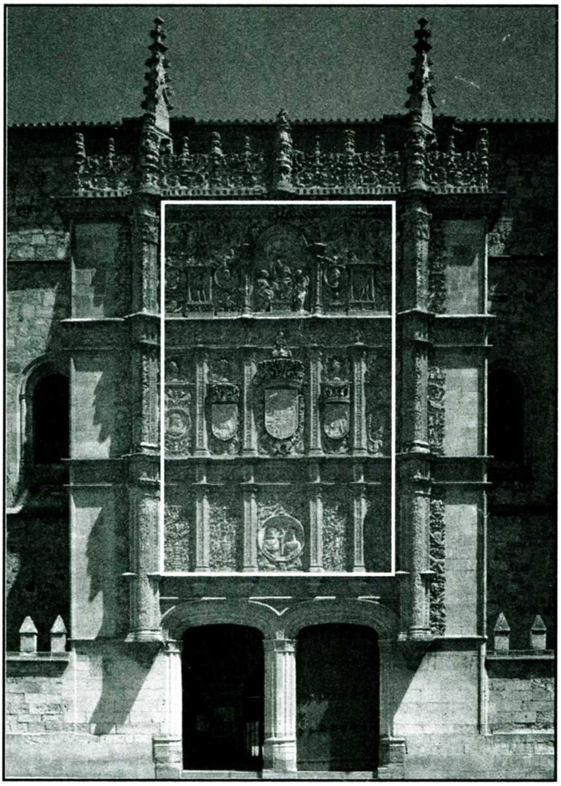
Мы можем, однако, подтвердить преднамеренное использование золотого сечения в средние века, потому что эти случаи часто были задокументированы. Правильный пятиугольник или пятиугольная звезда часто встречаются в этот период. Классическими примерами являются впечатляющие оконные розы готических соборов.

Благодаря переводам работ Витрувия архитекторы-теоретики эпохи Возрождения в стремлении к красоте снова обратились к идеям гармоничных пропорций. В отдельной главе трактата «О божественной пропорции» Лука Пачоли ставит человека в центр всего сущего: «Мы будем говорить в первую очередь о пропорциях человеческого тела, так как все измерения так или иначе диктуются человеческим телом, и рука Всемогущего указывает все виды пропорций, открывающие нам самые сокровенные тайны природы», чтобы затем использовать человека в качестве эталона пропорций. «По этой причине древние, учитывая правильные пропорции человеческого тела, создавали все свои работы, и особенно священные храмы, в соответствии с пропорциями тела человека, потому что в нем они обнаружили две основные фигуры, без которых невозможно ничего сотворить, а именно круг... и квадрат».

В «Десяти книгах о зодчестве» эрудит Леон Баттиста Альберти (1404–1472) утверждал, что красота заключается в гармонии частей друг с другом и с целым. Альберти говорил, что красота «является абсолютным значением эстетического организма, которое посредством математических расчетов и взаимосвязи пропорций или, как писал Платон в трактате «Тимей», с помощью пифагорейских средних вызывает в душе человека внутреннюю радость, рождая гармонию между человеком и Вселенной».

Тесная связь между пропорциями и гармонией в области музыки вдохновила на поиск подобных связей в структурных элементах зданий. Возможно, эта идея впервые появилась у Андреа Палладио (1508–1580), венецианского архитектора, работавшего в стиле маньеризма и оказавшего большое влияние на неоклассицизм. В работе «Десять книг о зодчестве» Альберти писал, что пропорции звуков являются гармонией для ушей, а пропорции размеров — гармонией для глаз: «Такие гармонии производят очень приятное впечатление, хотя никто не знает, почему, за исключением тех, кто изучает причины вещей».

Италия эпохи Возрождения была не единственным местом, где золотое сечение использовалось при строительстве зданий. Университет Саламанки — первое учебное заведение в Европе, известное под названием «университет» — является самым старым университетом в Испании (основан в 1218 г.). Его фасад был перестроен в XV веке в стиле платереско, который был характерен для эпохи испанского Возрождения и является смешением мавританского стиля и фламандской готики. Золотое сечение лежит в основе пропорций этого здания.

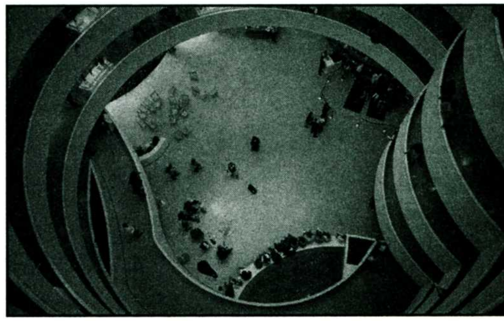


Фасад Университета Саламанки содержит большой «золотой» прямоугольник.

Современная архитектура

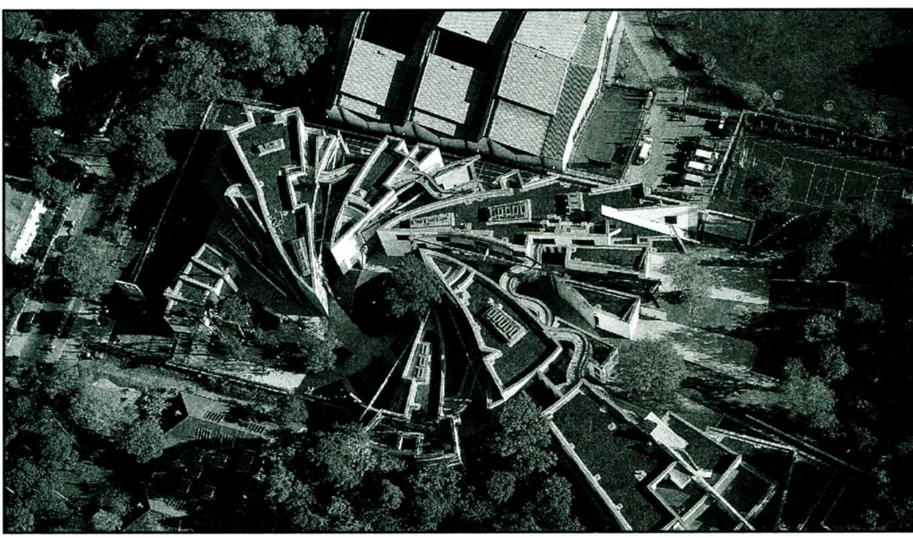
Достижения в области строительной техники и разработки новых материалов открыли новые возможности для архитекторов XX века. Американец Фрэнк Ллойд Райт (1867–1959) был одним из главных сторонников органической архитектуры. Незадолго до смерти он спроектировал музей Соломона Гуггенхайма в Нью-Йорке, представляющий собой опрокинутую спираль, а интерьер музея напоминает раковину наутилуса.

Польско-израильский архитектор Цви Хекер (р. 1931) также использовал спиральные конструкции в проекте школы им. Хайнца Галински в Берлине, построенной в 1995 г. Хекер начал с идеи подсолнечника с центральным кругом, откуда расходятся все архитектурные элементы.

Вид снаружи и изнутри на «золотую» спираль в музее Гуггенхайма в Нью-Йорке. Проект являлся революционным решением в архитектуре того времени.

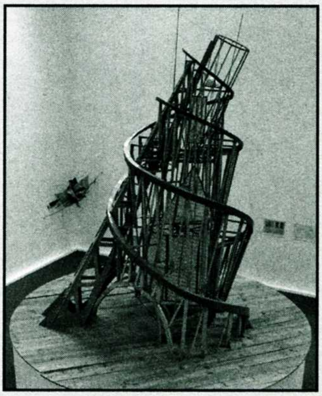
Здание представляет собой сочетание ортогональных и концентрических спиралей, символизируя взаимодействие ограниченных человеческих знаний и управляемого хаоса природы. Его архитектура имитирует растение, которое следует за движением Солнца, а потому классные комнаты освещены в течение всего дня.



Вид сверху на школу им. Хайнца Галински, спроектированную Цви Хекером. Идея навеяна расположением лепестков подсолнечника. В то время как архитектор подражает природе, расположение лепестков тесно связано с Ф.

ОПЕРЕЖАЯ ВРЕМЯ

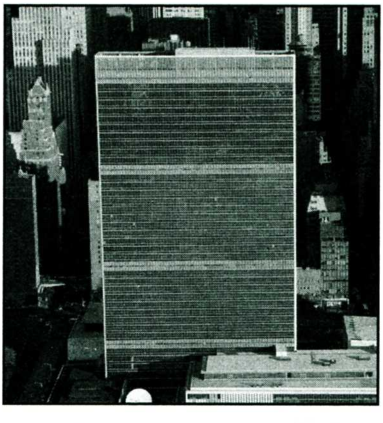
«Памятник III Интернационалу», предложенный русским дизайнером Владимиром Татлиным (1885–1953) в 1920 г., никогда не был построен, он представлен лишь в виде модели огромной башни из железа, стекла и стали. Двойная спираль из железа и стали обвивается вокруг трех этажей со множеством стеклянных окон. Каждый этаж должен был вращаться с разной скоростью. Первый этаж, куб, делает один оборот в течение года, второй этаж, пирамида, вращается со скоростью один оборот в месяц, а третий, цилиндр, совершает один оборот в день.



В Куинси-парке, расположенном в Кембридже, штат Массачусетс (США), «золотую» спираль можно встретить часто. Парк был спроектирован в 1997 г. художником Дэвидом Филлипсом и находится недалеко от Математического института Клэя. Это заведение является известным центром математических исследований. Кроме прочего, институт выдает многомиллионные награды за решение семи проблем тысячелетия, выбранных крупнейшими специалистами в каждой области. В Куинси-парке можно прогуливаться среди «золотых» спиралей и металлических кривых, рельефов из двух раковин и скалы с символом квадратного корня. На табличке написана информация о золотой пропорции. Даже парковка для велосипедов использует символ Ф.

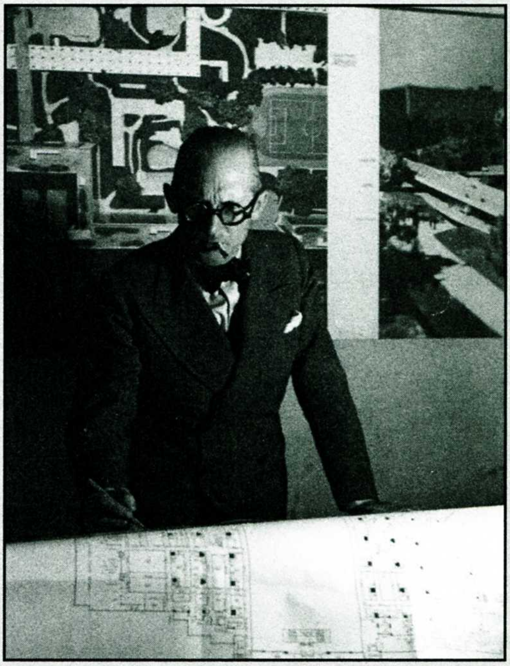
Ле Корбюзье

Радикальный новатор Ле Корбюзье является современным Лукой Пачоли. В эпоху метрической системы Ле Корбюзье попытался внести свой вклад в знаменитую историю золотого сечения. Он сожалел, что метрическая система деперсонализировала единицы измерения, и поэтому идеи измерений, связанных с человеческими пропорциями, были утеряны.



Здание ООН в Нью-Йорке представляет собой три «золотых» прямоугольника.

ЛЕ КОРБЮЗЬЕ (1887–1965)



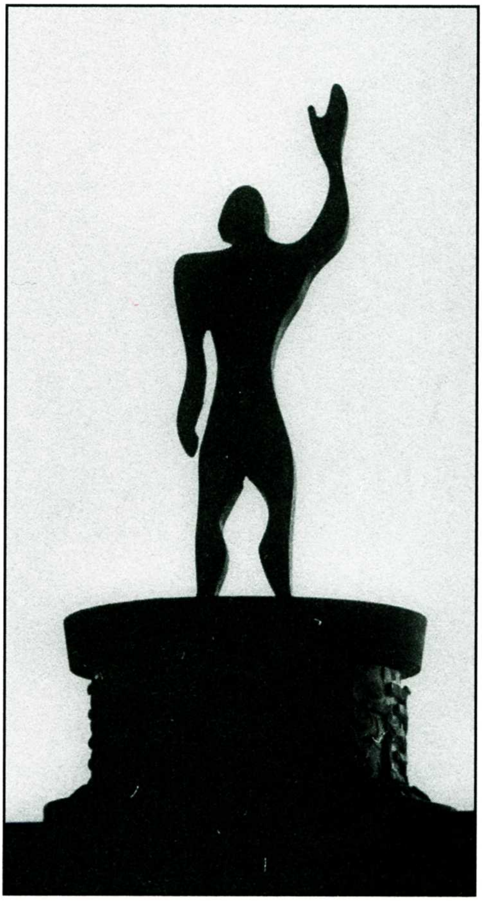
Шарль Эдуар Жаннере-Гри, более известный как Ле Корбюзье, родился в Швейцарии, но позже получил французское гражданство. Отучившись у себя на родине, Ле Корбюзье переехал в Париж в возрасте 29 лет, где открыл архитектурное бюро в 1922 г. Он путешествовал по Европе, Латинской Америке и Соединенным Штатам.

Ле Корбюзье занимался не только архитектурой, но и планировкой городов и товарным дизайном. Некоторые из его конструкций стали «иконами» современного дизайна, например, шезлонг. Он основал влиятельные журналы, читал лекции, опубликовал несколько научных работ, также был известным художником. Ле Корбюзье строил дома и крупные городские сооружения в странах по всему миру, став одним из самых знаменитых архитекторов. Он участвовал в международной комиссии, которая проектировала здание Организации Объединенных Наций в Нью-Йорке. Этот проект был окончательно завершен Нимейером, другим гигантом архитектуры и учеником Ле Корбюзье. Поэтому неудивительно, что фасад здания ООН представляет собой три «золотых» прямоугольника.

Чтобы вернуть человека в архитектуру, Ле Корбюзье изобрел собственную систему мер на основе золотого сечения, но с современным содержанием. По аналогии с «Витрувианским человеком», он придумал «Модулора». «Метр, сантиметр, дециметр — эти единицы не отражают человеческие пропорции, а Модулор отражает. Я измерил расстояния от солнечного сплетения к голове и руке и нашел золотое сечение, и я создал систему мер, которая отвечает пропорциям человеческого тела. Я открыл это, не осознавая всего. Я не преувеличиваю, но это важно, и это открывает огромные возможности для промышленности; это полезно и современно, это сенсационное нововведение».

Матила Гика высоко оценил вклад Ле Корбюзье, он писал во втором томе книги «Золотое сечение», что «золотой» прямоугольник «торжественно вступил в архитектуру благодаря последним проектам самых известных представителей нового движения». Далее он описывает планы архитектора музея «Мунданеум» в Женеве. Ле Корбюзье рассказывал, что он задумал «Мунданеум» в виде прямоугольного города, где соотношение между длиной и шириной составляет Ф: «Золотое сечение определяет обе оси координат, а также периметр. Ритм диктуется золотой пропорцией, что определяло гармонию большого количества работ на протяжении всей истории».

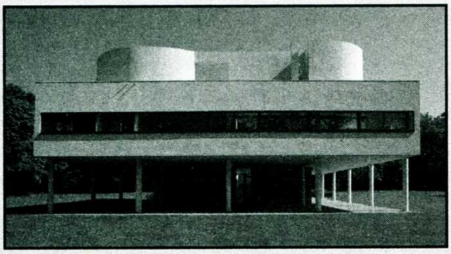
В годы Второй мировой войны строительство приостановилось. Ле Корбюзье посвятил это время теории. Между 1942 и 1948 годами он разработал «Модулора», систему мер для строительства и дизайна на основе золотого сечения и пропорций саксонского (Северная Европа) антропологического типа (рост 1,82 метра). Книга «Модулор» была опубликована в 1950 г. и имела мгновенный успех. В 1955 г. у нее вышло продолжение, «Модулор 2», где система мер была обобщена на латинский тип (Южная Европа) (рост 1,72 метра). Система «Модулор» вновь использовала классические идеи о связи пропорций зданий с людьми, которые в них живут.

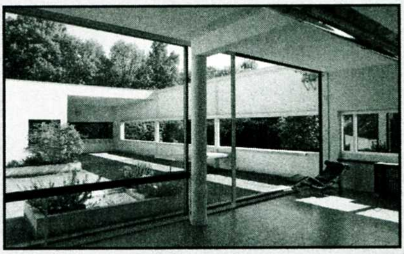


Статуя Модулора, основанная на идеальных пропорциях, предложенных Ле Корбюзье. Центральная точка фигуры с поднятой рукой, общей высотой 226 см, находится на уровне пупка (113 см). Оба числа, умноженные или разделенные на Ф, дают в результате числа Фибоначчи.

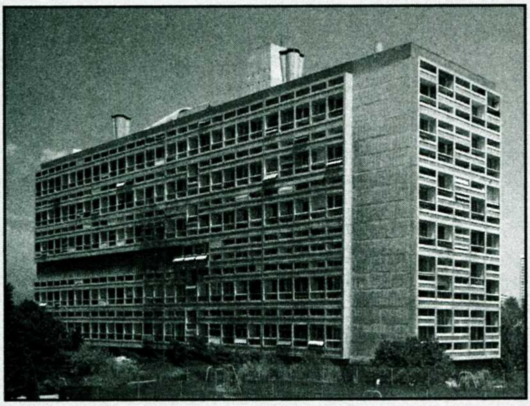
ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В РАБОТАХ ЛЕ КОРБЮЗЬЕ

Вилла Савой в Пуасси на окраине Парижа является хорошим примером того, как Ле Корбюзье использовал золотую пропорцию, которую можно увидеть как в экстерьере, так и в интерьере здания. Однако наиболее широко золотое сечение Ле Корбюзье применил при создании Марсельской жилой единицы, чтобы добиться максимально функционального дизайна, а также эстетических эффектов.





Вилла Савой в настоящее время является музеем и французским национальным памятником архитектуры. На фото можно видеть вид сзади (слева) и гостиную (справа) с доступом к центральной террасе.



Внешний вид и интерьер Марсельской жилой единицы. Все пространства внутри здания основаны на пропорциях системы Модулора.

Золотое сечение в дизайне

Типографское дело началось с изобретением печатного станка, и конечно же, знакомые нам имена, а именно Луки Пачоли, Леонардо да Винчи и Дюрера, встречаются и в истории дизайна различных печатных изданий. Главным вкладом этих гениев было прежде всего применение принципов пропорциональности. При работе над

«Молитвенником Максимилиана I» Дюрер использовал золотое сечение и в тексте, и в иллюстрациях.

Тем не менее еще до Гутенберга формат книг был очень близок к золотому сечению. Наиболее гармоничным для книг считается соотношение 1:1,6 (которое может быть записано как 5:8), но такая пропорция, как правило, используется для коллекционных изданий, потому что при этом неэкономно расходуется бумага. Более распространенный формат 1:1,4 (или 5:7).

Для нынешнего поколения все эти детали могут выглядеть преданиями давно минувших дней, но их не стоит так быстро забывать. Даже сегодня мы используем Ф в веб-дизайне. Кроме того, классическая форма «иконы» современного дизайна, устройства iPod фирмы Apple, представляет собой «золотой» прямоугольник.

Пачки сигарет также представляют собой «золотые» прямоугольники с тех пор, как один известный бренд в 1955 г. изменил размеры пачки во время кампании по смене имиджа. Это было сделано по практическим соображениям, а не по эстетическим. Часть современной упаковки сигарет одновременно является откидывающейся крышкой. Получилась коробка в виде параллелепипеда размером 8,5 на 5 см с отношением Ф. Этот дизайн вскоре скопировали все бренды мира.

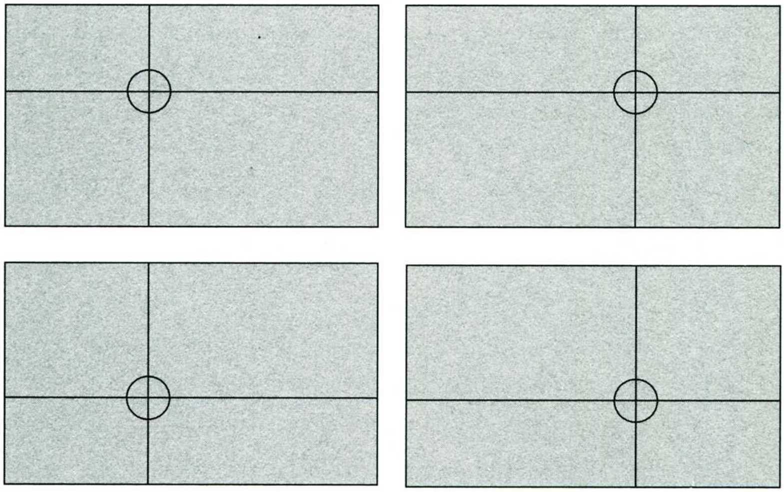
В дизайне одежды золотое сечение также используется, но несколько необычным образом. Одна американская фирма по производству джинсов применила Ф в покрое переднего кармана, в пропорциях заднего кармана, в отношении между боковым швом и шаговым швом брюк.

Еще одно проявление золотого сечения относится к сфере спорта. Большинство футбольных полей являются прямоугольниками с форматным отношением, приближающимся к 1,52, но не все. Одним из ярких примеров является стадион клуба «Реал Мадрид». Форма стадиона представляет собой «золотой» прямоугольник с форматным отношением 1,606. (Его размеры составляют 106 на 66 м.)

ЛЯГУШКИ ФИБОНАЧЧИ

На Всемирной выставке 2008 г., проходившей в испанском городе Сарагоса, художники Энджел Арруди и Фернандо Байо разместили 610 небольших лягушек по всей выставочной площадке. Число 610 является одним из чисел в последовательности Фибоначчи. В центре площадки находилась бетонная конструкция в форме куба, погруженного в землю. Используя золотое сечение, это сооружение показывало связь куба с кругом и числом π. Инсталляция называлась «Маленькие лягушки».

Оказывается, художники комиксов, хотя и неумышленно, но также используют Ф для определения фокусной точки на рисунке. Возьмем лист бумаги размером 5 на 3 см. Применяя Ф, мы получим следующие расстояния для фокусной точки: 5/1,618 = 3,09 см и 3/1,618 = 1,85 см. Таким образом, точка может быть расположена в прямоугольнике четырьмя различными способами.



Такое размещение образов можно увидеть в комиксах многих художников-мультипликаторов.

Дизайн в сфере музыки также не избежал влияния золотого сечения. Выдающийся мастер струнных инструментов Антонио Страдивари (1644–1737) размещал отверстия в скрипках в соответствии с золотой пропорцией. Несмотря на тщательные старания итальянца, не существует точных доказательств того, что такое расположение как-либо влияет на качество звука. Что касается композиторов, то по крайней мере Дебюсси и Барток знали и использовали золотое сечение в своих произведениях.

Глава 5

Золотое сечение в природе

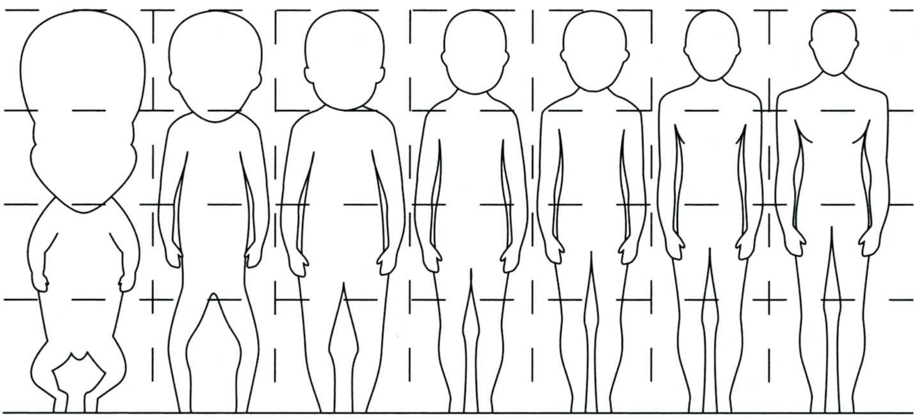
Представьте себе очень простую форму вроде прямоугольника. Как можно увеличить его размеры, не теряя соотношения сторон? Здравый смысл подсказывает нам, что прямоугольник должен расти равномерно, то есть в одинаковой пропорции во всех направлениях, как если бы его стороны были эластичными и понемногу бы растягивались. Логично предположить, что естественный рост прямоугольника означает, что все стороны удлиняются с одинаковой скоростью. Но тогда соотношение сторон будет меняться, и растущий прямоугольник изменит пропорции.

Растущие формы

Во второй главе мы видели, что при добавлении квадрата к «золотому» прямоугольнику, если сторона квадрата равна длинной стороне прямоугольника, получается другой «золотой» прямоугольник. Размер «золотого» прямоугольника увеличился, но его форма сохранилась, так как во всех «золотых» прямоугольниках соотношение сторон одно и то же (Ф). То же самое происходит, когда мы отсекаем квадрат от «золотого» прямоугольника. Поэтому мы говорили, что гномоном «золотого» прямоугольника является квадрат. Это свойство характерно для «золотых» прямоугольников и эквивалентно определению Ф. Поэтому чтобы изменить размер фигуры, не изменяя ее формы, мы можем использовать золотую пропорцию. В этом можно убедиться, наблюдая за ростом живых существ, например, растений.

Чтобы понять, что именно подразумевается под «сохранением формы», рассмотрим пример человека. Изменяются ли наши пропорции по мере нашего роста? Действительно, следует заметить, что развитие человеческого тела представляет собой постоянное изменение пропорций. Как бы мы к этому ни относились, но, к счастью, по мере взросления мы изменяемся. Если бы мы сохранили пропорции, данные нам при рождении, нам было бы трудно удержать голову в вертикальном положении.

В той же главе мы рассказывали о «золотой» спирали, которая отличается от других спиралей тем, как именно она расширяется с каждым витком. Шотландский биолог Д'Арси Томпсон (1860–1948), известный как «первый биоматематик»,



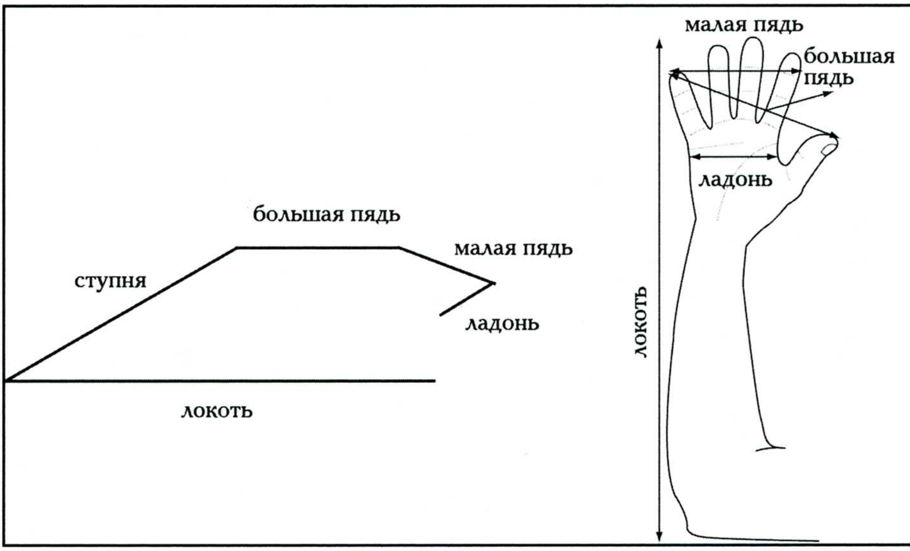
Сравнение пропорций головы и тела человека на различных этапах развития.

заметил, что способ увеличения в размерах некоторых живых существ без изменения формы характерен только для логарифмической спирали в отличие от других математических кривых: «Любая плоская кривая с фиксированным полюсом, такая, что полярная область сектора всегда является гномоном предыдущей области, есть логарифмическая спираль».

Насекомые летят по «золотой» спирали, когда приближаются к источнику света. Если, пытаясь приблизиться к неподвижной точке, мы хотим сохранять при этом угол поворота, такая спираль является для нас единственной возможной траекторией. Хищные птицы следуют такой траектории, когда нападают на добычу. Это единственный способ держать голову в одном и том же положении, чтобы не выпускать цель из поля зрения при максимальной скорости.

Золотое сечение у живых существ

«Витрувианский человек» Леонардо да Винчи строился на предположении, что Ф присутствует в животном мире. Начиная с того времени, в науке и искусстве продолжаются исследования связей различных частей человеческого тела с золотым сечением. Однако уже в средние века меры частей человеческого тела использовались в качестве стандартов. При постройке французских соборов использовался измерительный прибор, состоящий из пяти стержней, представляющих длины ладони, большой и малой пяди (расстояния от конца мизинца до конца большого и указательного пальцев соответственно), ступни и локтя.



Все эти длины были кратны меньшей единице длины, называемой линией, равной 1/12 дюйма, то есть немногим меньше 2,5 мм (точнее, 2,247 мм). В следующей таблице показаны эти меры длины в метрических единицах. Мы видим, что количества линий являются числами из последовательности Фибоначчи, так как отношение каждого к предыдущему равно Ф, что еще более удивительно, ведь эти единицы измерений соответствуют произвольным частям человеческого тела.

ладонь	34 линии	7, 64 см
малая пядь	55 линий	12,63 см
большая пядь	89 линий	20 см
ступня (фут)	144 линии	32,36 см
локоть	233 линии	52,36 см

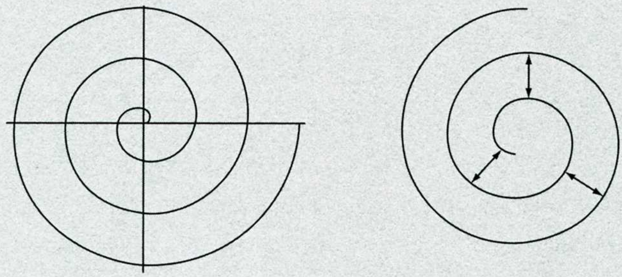
Филлотаксис и золотое сечение

Филлотаксис — слово греческого происхождения, состоящее из phyllon — «лист» — и taxis — «расположение в порядке». Слово относится к разделу ботаники, изучающему расположение листьев на стебле растения. А это, как мы увидим, регулируется геометрическими и числовыми законами. Изучение филлотаксиса привело к открытию некоторых удивительных закономерностей роста природных систем, которые описываются точным математическим языком.

СПИРАЛИ

Спираль — это непрерывная кривая, которая огибает некоторую центральную точку, никогда не пересекая саму себя. Существуют различные типы спиралей, получаемые разными способами, каждый со своими особыми свойствами.

Первый тип — так называемая *спираль Архимеда*, названная в честь ее первооткрывателя, который увидел ее в паутине. Такую спираль можно сделать, обернув веревку вокруг любого стержня, затем осторожно перенести веревку на плоскую поверхность, сохраняя витки. Веревка будет описывать спираль, в которой расстояние от центра до любой точки веревки пропорционально углу поворота. Одно из основных свойств такой спирали — то, что расстояние между любыми двумя витками остается неизменным.



Если мы проделаем то же самое, но в этот раз обмотаем веревку вокруг конуса, то получим *золотую спираль* или *спираль Дюрера* (знаменитая *логарифмическая спираль*, которая не раз уже упоминалась в этой книге). В такой спирали расстояние между витками увеличивается, как это можно видеть на рисунке поперечного сечения раковины моллюска.

Спираль в трехмерном пространстве называется *винтовой спиралью* (винтовой линией). Винтовые спирали могут увеличиваться в размерах, как это видно на примере рогов некоторых животных. Они называются коническими винтовыми спиралями. Винтовые спирали могут также сохранять постоянную ширину (как в случае пружин, винтовых лестниц или двойной спирали ДНК). Тогда они называются *цилиндрическими винтовыми спиралями*.

Первое, что мы видим: листья растений не растут ровно друг над другом. Если бы такое происходило, то одни листья скрывали бы другие от необходимых им солнечных лучей. Поэтому листья должны расти в определенном порядке, и тщательные исследования позволили дать математическое описание таких расположений.

Леонардо да Винчи был первым, кто сформулировал основные принципы. Великий гений определил, что листья расположены на стебле по спирали, группами

ИОГАНН КЕПЛЕР (1571–1630)

Немецкий астроном Иоганн Кеплер с очень раннего возраста был сторонником гелиоцентрической теории Солнечной системы. Эта гипотеза была высказана его польским коллегой Коперником, который утверждал, что планеты вращаются вокруг Солнца, а не вокруг Земли. Однако официальная теория настаивала на том, что Земля является центром Вселенной, и другие убеждения могли привести к тюремному заключению.

Кеплер верил в пифагорейскую теорию, что все управляется числами. Он считал, что известная нам Вселенная основана на пяти платоновых телах (единственно возможных правильных многогранниках). Кеплер попытался построить геометрические модели орбит шести планет, известных в то время. Он изложил это в своей первой книге Mysterium Cosmographicum («Тайна мира») в 1596 г., попытавшись объяснить строение мира, следуя греческой идее «гармонии».

Модель Кеплера выглядит следующим образом: «Орбита Земли есть мера всех орбит. Опишем додекаэдр вокруг нее. Описанная вокруг него сфера является орбитой Марса. Опишем тетраэдр вокруг орбиты Марса. Описанная вокруг тетраэдра сфера является орбитой Юпитера. Опишем куб вокруг орбиты Юпитера. Описанная вокруг куба сфера является орбитой Сатурна. Теперь впишем икосаэдр в орбиту Земли. Вписанная в него сфера является орбитой Венеры. Впишем октаэдр в орбиту Венеры. Вписанная в него сфера является орбитой Меркурия».

Так немецкий математик построил красивую и гармоничную модель, которая отвечала наблюдениями того времени, с незначительными ошибками. Однако эта теория не имела ничего общего с реальностью, что сам Кеплер вынужден был признать вскоре после публикации.

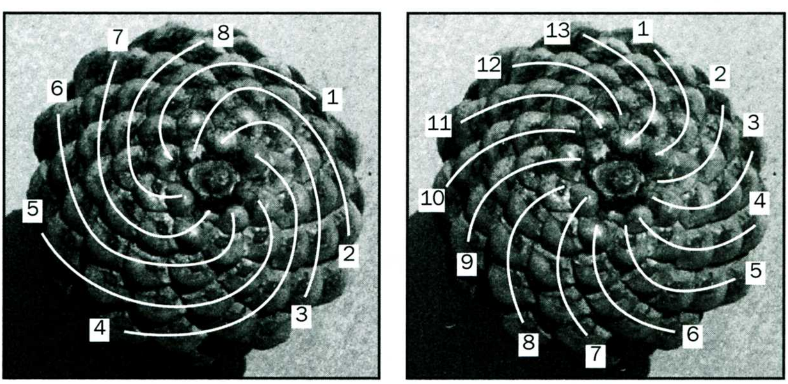
по пять, что говорит о том, что количество листьев за несколько витков кратно пяти. Некоторое время спустя Кеплер заметил, что пятиугольник часто встречается в цветах с пятью лепестками и во фруктах, где семена расположены в форме звезды, например, в яблоках.

Филлотаксис и математика стали единой теорией в XIX веке благодаря немецкому естествоиспытателю Карлу Шимперу (1803–1867) и французскому кристаллографу Огюсту Браве (1811–1863). Они оба обнаружили в сосновых шишках числа из последовательности Фибоначчи. Их исследования показали, что модели филлотаксиса могут быть выражены отношениями чисел Фибоначчи.

С тех пор последовательность Фибоначчи и ботаника связаны друг с другом. В 1968 г. американский математик Альфред Броссо изучил 4290 шишек десяти различных видов калифорнийской сосны и доказал, что с незначительным исключением (74 шишки) в остальных проявляется последовательность Фибоначчи. То есть 98,3% выборки. Как это часто бывает, спустя некоторое время научное сообщество в качестве проверки повторило эксперимент. В 1992 г. канадский ботаник Роджер Жан провел исследование 12750 экземпляров 650 различных видов. На этот раз последовательность Фибоначчи появилась в 92% случаев.

Листья большинства растений с высоким стеблем расположены по спирали и, как правило, следуют определенному закону, который выполняется для всех видов растений. Закон гласит, что угол, образуемый двумя последовательными листьями, является постоянным и называется углом расхождения. Этот угол может быть выражен в градусах или в виде дроби, где в числителе стоит число оборотов вокруг стебля, начиная с одного листа до такого же выше по стеблю, а в знаменателе стоит число листьев, расположенных на спирали между этими двумя листьями.

Последовательность Шимпера–Брауна, состоящая из отношений чисел из последовательности Фибоначчи соответственно к числам, следующим через позицию, a_n/a_{n+2}, позволяет классифицировать многие виды по углу расхождения. Так как отношение между двумя последовательными числами a_{n+1}/a_n стремится к Ф, отноше-



Количества спиралей на сосновой шишке в каждом направлении (8, 13) являются числами из последовательности Фибоначчи.

ния из последовательности Шимпера—Брауна стремятся к $1/\Phi^2$. Математическое доказательство выглядит следующим образом:

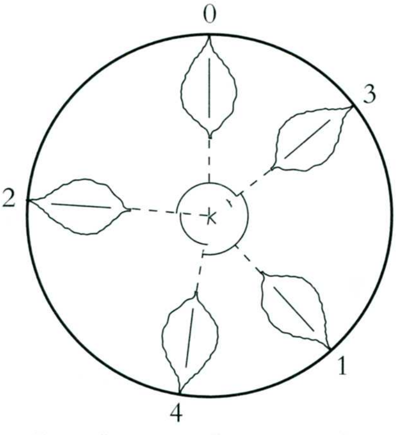
$$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \to \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}.$$

По-настоящему сложный вопрос заключается в том, откуда растения «знают», что их листья должны быть расположены в соответствии с последовательностью Фибоначчи? Дело в том, что стебель растения имеет коническую форму. Листья на стебле растут радиально, если смотреть на растение сверху. Браве заметил, что каждый следующий лист повернут примерно на 137,5° от предыдущего. Посчитаем

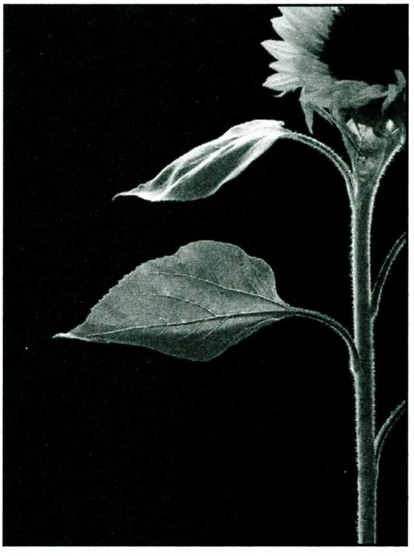
$$360^\circ \cdot \frac{1}{\Phi^2} = \frac{360^\circ}{\Phi^2},$$

(где 360° соответствует полному обороту) и получим угол в 137,5°, который иногда называют «золотым» углом.

Идя в противоположном направлении, от математики к ботанике, группа ученых во главе с Ривьером доказала в 1984 г., что, используя математический алгоритм и угол роста, равный «золотому» углу, можно получить конфигурации, подобные тем, которые встречаются у реального подсолнечника. Это заключение было интересно тем, что именно однородные и сопоставимые структуры в живых организмах

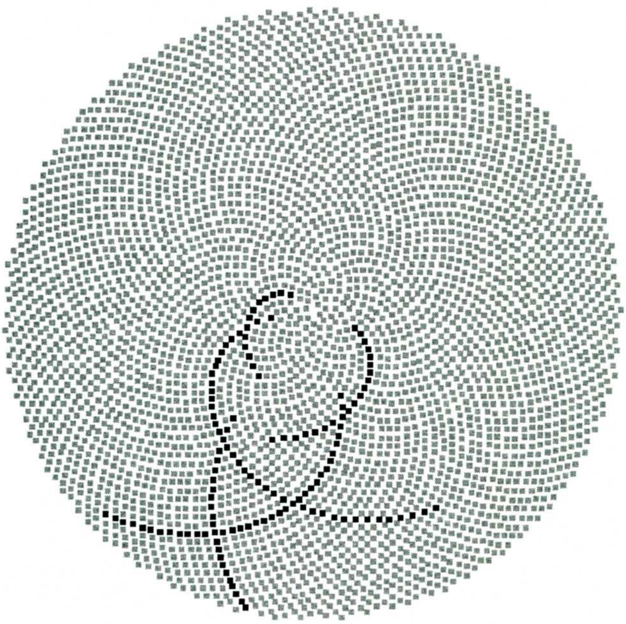


Каждый следующий лист на стебле подсолнечника повернут примерно на 137,5° от предыдущего.



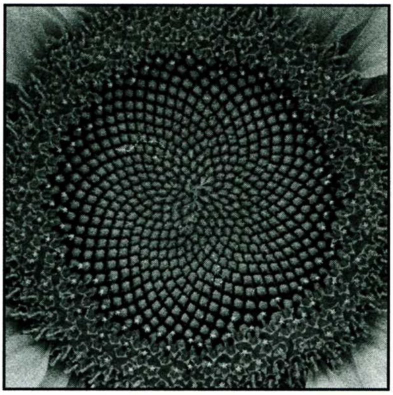
резко ограничивают их возможные формы. В свою очередь, это объясняло частое появление чисел Фибоначчи и золотого сечения в филлотаксисе. Другие эксперименты, например, с магнитными полями, также приводят к конфигурациям с «золотой» спиралью.

В этом распределении виртуальных семян, сгенерированном компьютером, можно ясно увидеть большое количество спиралей в разных направлениях. Количества спиралей похожей длины в обоих направлениях обычно соответствуют числам из последовательности Фибоначчи.



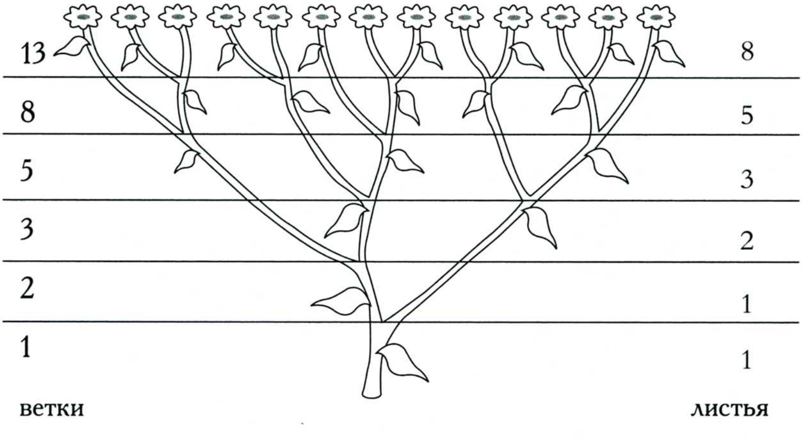
Классический эксперимент в этой области был проведен в 1907 г. немецким математиком Герритом ван Итерсоном. Он расположил последовательные точки по спирали с поворотом на 137,5° и показал, что человеческий глаз воспринимает их как семейство спиралей, закрученных по часовой и против часовой стрелки. Количество спиралей в этих двух семействах, как правило, соответствует числам Фибоначчи. Подсолнечник — один из самых ярких примеров этого явления. Его семена образуют спирали по часовой и против часовой стрелки. Количества таких спиралей являются числами из последовательности Фибоначчи. Наиболее часто встречаются пары 21 и 34, 34 и 55, 89 и 144.

Что это: внутренняя закономерность роста или просто удивительное совпадение?



Подсолнечник содержит 21 и 34 спирали в противоположных направлениях.

Ветви деревьев расположены так же, как и листья растений. Опять же, ветви растут не одна над другой, а по спирали. Размер дерева меняется по ходу его роста, но пропорции между высотой и длиной его ветвей сохраняются, как и общая форма. Благодаря этому опытный наблюдатель может отличить один вид от другого на расстоянии, не рассматривая листья или кору вблизи.



Тысячелистник птармика (Achillea ptarmica) — одно из многих растений, у которого ветки и листья расположены в соответствии с последовательностью Фибоначчи.

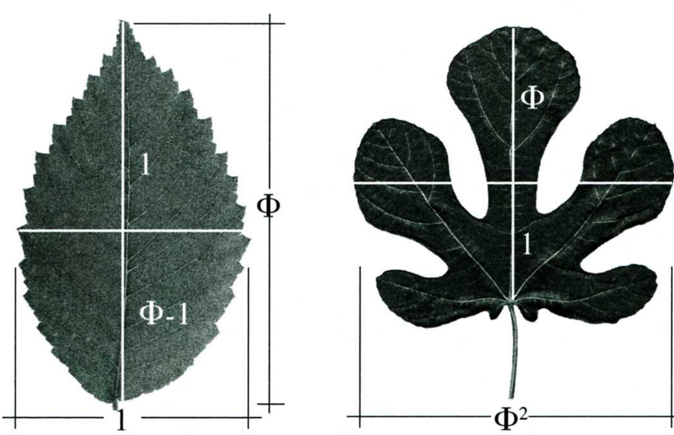
Цветы и лепестки

Количество лепестков ромашки всегда является числом из последовательности Фибоначчи, в данном случае, 21.

Число лепестков многих цветов также соответствует некоторым членам последовательности Фибоначчи, например, у сирени (3 лепестка), лютика (5), шпорника (8), календулы (13) и астры (21). Различные виды ромашки имеют разное количество лепестков, но это всегда числа Фибоначчи (21, 34, 55, 89).

Типичной сценой в любовных рассказах является гадание на ромашке: отрывая лепесток за лепестком, герои спрашивают «любит — не любит». Можно подумать, что у влюбленного математика будет преимущество при отрывании лепестков ромашки, но это не так. К счастью, природа и последовательность Фибоначчи оставляют место для случайности, и цветок всегда будет хранить тайну. Хотя количество лепестков ромашки является числом Фибоначчи, это число может быть как четным, так и нечетным, и мы не узнаем сколько лепестков имеет конкретная ромашка, пока не закончим их обрывать.

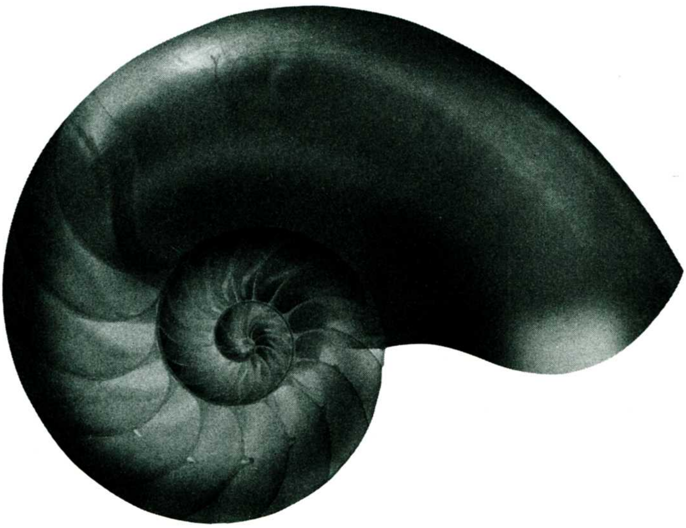
Может показаться, что, как и в архитектуре, золотая пропорция в растениях встречается неестественно часто и явно. Тем не менее, строгие эксперименты в этой области дают пищу не только для размышлений, но и для эстетического наслаждения.



Листья шершавого вяза (Ulmus glabra) и фигового дерева (Ficus carica) имеют форму в соответствии с золотой пропорцией.

Наутилус

Раковины моллюсков часто имеют форму «золотой» спирали. Самый характерный пример — это раковина наутилуса (Nautilus pompilius). Раковина увеличивается с добавлением внутренних камер, каждая из которых больше, чем предыдущая, но форма раковины остается прежней. Новая камера добавляется к предыдущей и имеет точно такую же форму, только большего размера.



Спиральная структура наутилуса напоминает по форме водовороты в джакузи или при спускании воды в ванне. Или, в более широком масштабе, спиральные рукава некоторых галактик.

В природе часто встречаются структуры в форме пятиконечной звезды, такие как морская звезда.

Фракталы и золотое сечение

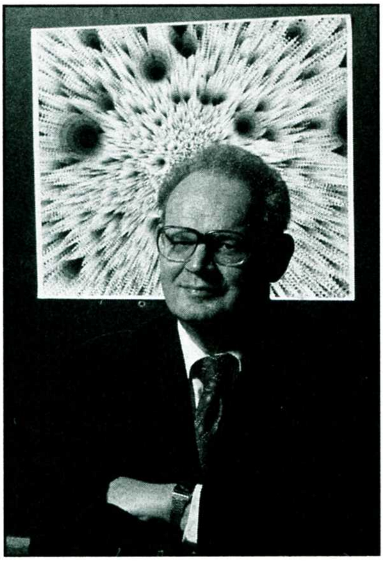
В первой главе мы видели два выражения для Ф: в виде цепной дроби и в виде корня из других корней:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} = [1,1,1,1,\ldots] = [\bar{1}] \qquad (1)$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}} \qquad (2)$$

Если продолжить запись одного из этих выражений, то мы получим дробь от дроби, корень от корня и так до бесконечности. Однако посмотрим на последний член выражения, как будто бы в микроскоп. Какой бы член мы ни взяли, он будет в точности похож на исходное выражение. Это мысленное упражнение приводит нас в мир фракталов.

Теория фракталов появилась в 1975 г. с публикацией статьи «Фрактальные объекты: форма, случайность и размерность» академика Бенуа Мандельброта (1924–2010). В предисловии автор объясняет, что термин «фрактальный объект» и «фрактал» происходит от латинского прилагательного fractus, что значит «разбитый, дробленый», или, лучше сказать, «дробный». Два года спустя в книге «Фрактальная геометрия природы» Мандельброт представил новое определение: «множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности». Далее мы попытаемся пояснить эту идею.



Бенуа Мандельброт, математик, создатель фрактальной геометрии.

Как мы помним, классические геометрические объекты имеют целочисленные размерности: точка имеет размерность ноль, прямая — 1, плоскость — 2, а пространство — 3. Фракталы, напротив, имеют дробную размерность. С нецелой размерностью фракталы не могут обладать «нормальным» объемом и площадью. В фрактальной вселенной такое вполне допустимо. Фрактал размерности более 1 и менее 2 — это поверхность, не ограниченная кривой, или группа прямых линий, не являющаяся двумерной плоскостью.

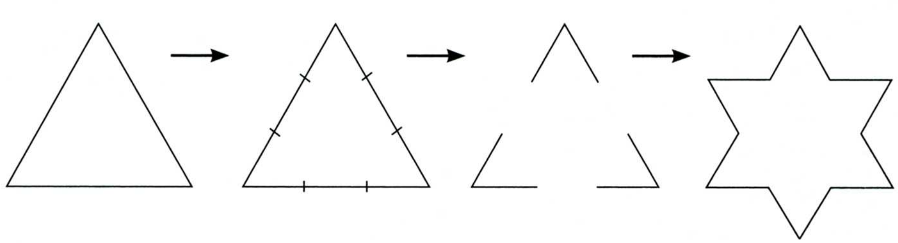
Такой является кривая Коха, получаемая в результате повторяющихся геометрических построений, как мы увидим ниже. Если фрактальная размерность находится между 0 и 1, как в так называемом *множестве Кантора*, то получается множество точек на линии, которые не образуют прямую линию, хотя таких точек бесконечное количество и они бесконечно близки друг к другу. В результате получается забавный геометрический парадокс.

Одной из характерных особенностей фракталов является самоподобие. Другими словами, они сохраняют одну и ту же форму при увеличении или уменьшении размера. Будем ли мы смотреть на них с близкого расстояния или издалека, в целом или на какую-то часть, мы всегда будем видеть одно и то же.

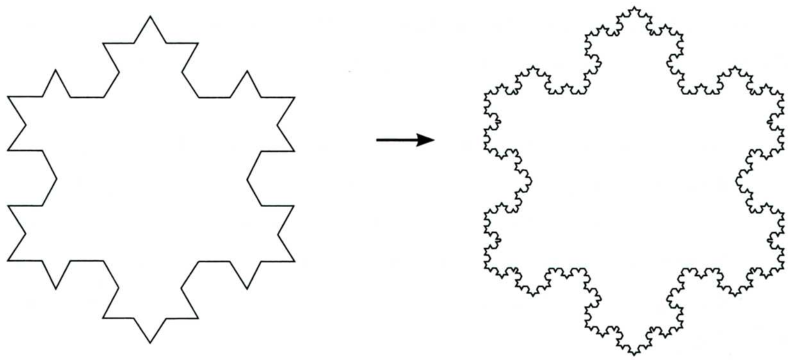
Фрактальные снежинки

Кривая Коха — это фрактал, также называемый «снежинкой Коха» из-за стилизации формы снежинки. Это один из первых фрактальных объектов, описанный в 1906 г. шведским математиком Хельге фон Кохом (1870–1924) задолго до того, как эти объекты получили сегодняшнее название. Давайте посмотрим, как строится кривая Коха и какими свойствами она обладает.

Возьмем равносторонний треугольник и разделим каждую сторону на три равных отрезка. Затем удалим центральную часть на каждой стороне и построим извне равносторонний треугольник со сторонами, равными центральному отрезку, который мы удалили.



Будем повторять этот процесс для каждого построенного маленького равностороннего треугольника. Вскоре станет слишком трудно делать построения с помощью карандаша и бумаги, но компьютер может продолжать процесс очень долго.



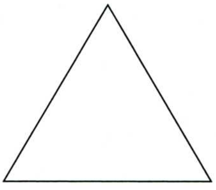
Мы можем посчитать периметр и площадь «снежинки Коха». При каждом шаге мы заменяем отрезок длины 3 (3 части) на 4 отрезка общей длины 4.

Таким образом, при каждом шаге начальная длина умножается на 4/3. Если изначальный периметр равностороннего треугольника был равен L, после n шагов длина кривой будет

$$L_n = L \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

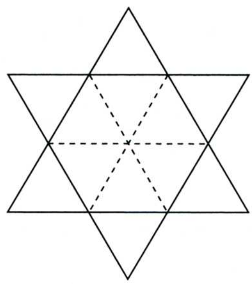
Так как 4/3 больше 1, то значение этого выражения может быть сколь угодно большим! Или в математических терминах, длина кривой Коха, L_n, стремится к бесконечности. Мы можем удлинять ее неограниченно.

Давайте посмотрим, что происходит с площадью. Предположим, что исходный треугольник имеет площадь $A = 1$.

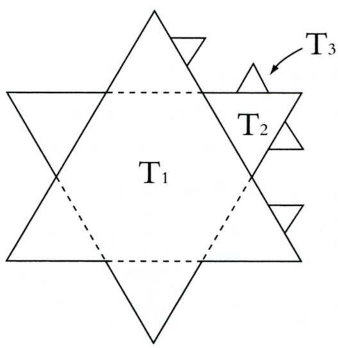


Разобьем его на треугольники, сторона которых в три раза меньше исходной, то есть получим девять маленьких треугольников. Еще три треугольника были добавлены после первого шага, их общая площадь составляет $1/3$ от первоначальной площади. Таким образом, мы имеем:

$$A_1 = 1 + 1/3 = 4/3.$$



Вокруг каждого маленького треугольника T_2 мы добавляем четыре еще более маленьких треугольника при следующем шаге, T_3, что составляет $4/9$ площади трех треугольников T_2, которая, как мы видели, равняется трети от общей площади A_1. Таким образом, при втором шаге мы добавили $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}$.



Рассуждая аналогичным образом, мы видим, что при каждом из следующих шагов мы добавляем $4/9$ от площади, добавленной при предыдущем шаге, так что наша общая площадь выражается так:

$$A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot\frac{1}{3} + \ldots$$

Упростим это выражение. Вынесем общий множитель за скобки, а к выражению в скобках применим формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$A = 1+\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3+\ldots\right) = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6\,.$$

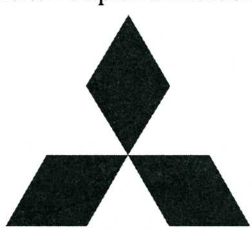
Таким образом, после бесконечного числа шагов у нас получится кривая бесконечной длины, однако эта кривая ограничивает площадь, которая всего лишь в 1,6 раза больше площади исходного треугольника.

Размерность «снежинки» больше 1 и меньше 2. Давайте вспомним наш первый шаг: мы перешли от отрезка длины 3 к отрезку длины 4. Если бы мы остались на прямой, ее размерность была бы равна 1, потому что $3^1 = 3$. Если бы мы построили квадрат со стороной 3, он бы имел площадь 9, потому что $3^2 = 9$, и размерность 2. При переходе к длине 4 размерность является числом d, таким, что $3^d = 4$. Чтобы найти d, мы используем логарифмы.

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1{,}2619.$$

Как мы видим, размерность является дробным числом. Вот почему Мандельброт использовал латинское слово fractus.

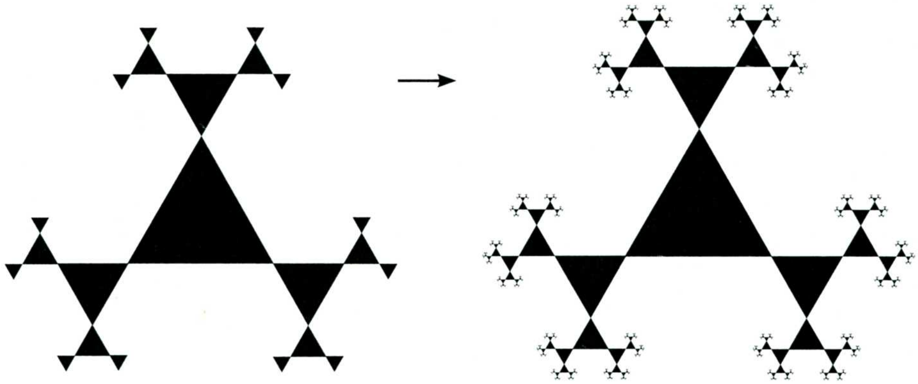
Существует другой вариант этой кривой, который нам очень знаком: антиснежинка Коха. Она строится аналогично снежинке, только при каждом шаге треугольники добавляются внутри исходного треугольника. Эта антиснежинка используется в качестве логотипа японской марки автомобилей.



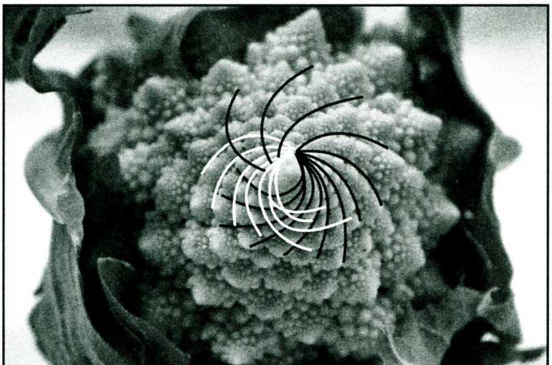
Но фракталы представляют собой нечто большее, чем забавный математический парадокс: сама природа имеет фрактальную структуру. Чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на деревья: рост ветвей можно с поразительной точностью смоделировать с помощью фракталов. Существует много фрактальных моделей деревьев, где из каждого сучка под определенным углом растут ветви, длина которых равняется длине предыдущей ветки, умноженной на коэффициент f. В зависимости от значения этого множителя ветки могут пересекаться и даже расти друг на друге.

Эта проблема должна быть решена, если мы хотим иметь корректную модель реальности. Мы должны определить предельные значения множителя f. Исследования показывают, что он связан с Φ, потому что его значение равняется $1/\Phi$.

Если мы начнем строить дерево не с прямой линии, а с фигуры, например, с равностороннего треугольника, и в каждой вершине треугольника поместим другой равносторонний треугольник, длина стороны которого равна исходной, умноженной на коэффициент f (на нашем рисунке $f = 1/2$), так чтобы ветви не пересекались, а лишь касались, максимальное значение f также будет $1/\Phi$.



Романеско (один из культурных сортов капусты Brassica oleracea) является самым красивым примером фракталов в природе, потому что ее структура видна невооруженным глазом, без вычислений и математических формул. Если отрезать любой кусок, его форма всегда будет такой же, как и у целого кочана. Мы можем



Количества спиралей в кочане цветной капусты романеско являются числами из последовательности Фибоначчи.

проверить связь с Ф, посчитав спирали в обоих направлениях. В результате мы получим два числа из последовательности Фибоначчи: 8 и 13 спиралей.

Конец путешествия

Мир фракталов глубок и сложен, мы лишь едва коснулись его. Роль Ф во фрактальных структурах вовсе не ограничивается тем, что мы видели. Но самое интересное заключается в том, что это древнее и прославленное число, появившееся в математике более 20 веков назад, до сих пор встречается в новых областях современной науки. Число Ф не является отслужившей свое игрушкой, оно и сегодня продолжает играть важную роль.

Здесь наше путешествие подошло к концу. Хочется надеяться, что сам путь был столь же интересным, как и пункт назначения. Мы делали много остановок в самых разных областях: живопись, архитектура, астрономия, дизайн и сама природа. Мы подошли к месту, откуда открываются широкие горизонты. Несомненно, нас ждут новые открытия.

Приложение

Тексты из первоисточников

ГЛАВА V из трактата Луки Пачоли «О божественной пропорции»

В пятой главе трактата Пачоли указывает пять причин, по которым он считает уместным называть соотношение отрезков, разделенных в крайнем и среднем отношении, «божественной пропорцией». Текст представляет собой смесь философских, богословских и математических идей.

О подходящем названии для настоящего трактата или обзора

Мне кажется, Светлейший герцог [Милана], что для нашего трактата подойдет название «О божественной пропорции» из-за многих соответствий и связей с существованием Бога, которые я нахожу в нашей пропорции и которым посвящается этот наш весьма полезный обзор. Для наших целей будет достаточно выбрать из них четыре.

Во-первых, она является единственной, и к ней невозможно добавить никакие другие виды или разновидности. Это единство является высшим атрибутом самого Бога согласно всем богословским и философским учениям.

Во-вторых, ее связь со Святой Троицей: как и божественное имеет три ипостаси Отца, Сына и Святого Духа, так же и наша пропорция всегда заключена между тремя членами, ни больше, ни меньше, как мы далее увидим.

Третье соответствие состоит в том, что как сам Бог не может быть определен или открыт нам через слова, так и наша пропорция не может быть ни обозначена понятным числом, ни выражена каким-либо рациональным количеством, но всегда остается скрытой и тайной, и называется математиками иррациональной.

Четвертое соответствие состоит в том, что как сам Бог не изменяется и пребывает весь во всем и весь в каждой части, так и наша пропорция всегда *и во всех количествах, непрерывных и дискретных, больших и малых, является той же самой и всегда неизменной, и никоим образом не может ни измениться, ни быть понятой по-другому, как мы покажем ниже.*

Пятое соответствие, которое не без оснований может быть добавлено к предыдущим четырем, состоит в том, что как Бог сопоставляется с Небесной Силой, иначе называемой Пятой Сущностью, а через нее с другими простыми телами, то есть с четырьмя элементами — землей, водой, воздухом и огнем — а через эти сущности дает жизнь всему другому в природе, так и наша божественная пропорция в качестве формальной сущности придает, согласно древнему Платону и его «Тимею», самому небу форму додекаэдра, или тела из 12 пятиугольников, которое, как мы покажем ниже, невозможно построить без нашей пропорции. И точно так сообщает особую форму каждому из остальных элементов: огню — пирамидальную, называемую тетраэдром, земле — кубическую, называемую гексаэдром, воздуху — фигуру, называемую октаэдром, и воде — ту, что называется икосаэдром. И как говорят ученые, все правильные тела исчерпываются этими формами и фигурами, как мы покажем ниже для каждой из них в отдельности. А через них наша пропорция придает форму бесконечному числу других тел, называемых зависимыми. И эти пять правильных тел без нашей пропорции невозможно ни сравнить друг с другом, ни вписать в сферу. И хотя можно было бы добавить и другие соответствия к этим пяти, их для данного краткого изложения будет достаточно.

Лука Пачоли о Божественной пропорции

Здесь мы приводим отрывки из двух глав трактата Пачоли, где он рассказывает о божественной пропорции. Глава VII описывает, как определить золотое сечение, а глава VIII — как вычислить золотое сечение.

Текст переведен с сохранением стиля, в котором трактат был написан, что представляет некоторую сложность для современного читателя. Основная проблема заключается в том, что по сегодняшним меркам рассуждения слишком часто отклоняются в сторону. То, что сегодня является элементарным и преподается в начальной школе, например, равенство дробей, Пачоли вынужден подробно пояснять, часто используя понятие и слово «пропорция». Во времена Пачоли, примерно в 1500 г., математические обозначения еще не были развиты, и понятие формулы было неизвестно. Как видно из текста, автору приходилось объяснять выражения типа

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

используя только слова, а не символы.

Однако ценность этого текста заключается не столько в его исторической важности в связи с золотым сечением, сколько в представлении состояния математики в ту далекую эпоху. В этом смысле работа выдающегося итальянского ученого, его современников и прежде всего достижения их предшественников приобретают еще большее значение, если учитывать то, что они работали в тесных рамках неразвитого математического языка.

ГЛАВА VII

О первом следствии относительно линии, разделенной в соответствии с нашей пропорцией

Пусть прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении, потому что именно так ученые называли нашу изысканную пропорцию. Тогда, если к большей части прибавить половину всей пропорционально разделенной линии, обязательно окажется, что квадрат суммы всегда будет пятикратным, то есть в пять раз больше, чем квадрат половины от общей суммы.

Прежде чем продолжить, мы должны сказать, как надлежит понимать и строить названную пропорцию между количествами, и как ученые называли ее в своих книгах. Я утверждаю, что название proportio habens medium et duo extrema *означает, что пропорция имеет середину и два края, то есть имеет отношение ко всему трехчастному, ведь каким бы ни было это трехчастное, оно всегда будет иметь середину и два края, ибо без них не представить и середины.*

Как понимать середину и края

После того как мы дали нашей пропорции особенное название, остается объяснить, как следует понимать середину и края в любом количестве и какие условия должны быть выполнены для них для получения божественной пропорции. Для этого мы должны знать, что между тремя членами одного и того же типа *обязательно имеются две основных связи или пропорции, а именно: одна — между первым и вторым членами, и другая — между вторым и третьим. Например, пусть имеются три количества одного и того же типа, и мы не видим никаких соотношений между ними. Пусть первое будет* a, *в числах равное 9, второе —* b, *равное 6, третье —* c, *равное* 4.

Я утверждаю, что между ними имеются две пропорции: одна от a *до* b, *то есть от 9 до 6, которую мы в нашей работе называем полуторной, когда больший член содержит меньший и его половину, так как 9 содержит 6 и еще 3, половину от 6, поэтому мы называем ее полуторной. (...). Существует также пропорция от второго,* b, *до третьего,* **c**, *то есть от 6 до* 4, *еще одна полуторная пропорция. Подобны они или нет, нас в данный момент не интересует, потому что мы намерены только показать, что между тремя членами одного и того же рода обязательно имеются две пропорции. Я утверждаю также, что наша божественная пропорция соблюдает одни и те же условия, а именно: между тремя ее членами — средним и двумя крайними — всегда содержатся две пропорции и всегда одного и того же обозначения. И в других пропорциях, будь они непрерывными или обособленными, это происходит бесконечно разными способами, потому что иногда между тремя членами она будет двойной, иногда тройной, и так далее для всех общих типов. Но между серединой и краями нашей пропорции не может быть никаких вариаций, как мы далее увидим (...).*

Поэтому мы должны знать, чтобы уметь распознать ее среди различных количеств, что между тремя ее членами обязательно имеется непрерывная пропорциональность, а именно: произведение меньшего члена на сумму меньшего и среднего равно квадрату среднего, и, следовательно, данная сумма обязательно будет ее большим членом. И когда мы находим три количества любого типа, упорядоченных таким образом, мы утверждаем, что они находятся в крайнем и среднем отношении, их больший член всегда равен сумме меньшего и среднего, так что можно сказать, что больший член является целым, разделенным на две части, то есть на меньший и средний члены этой группы. Следует заметить, что эта пропорция не может быть рациональной, ибо нельзя меньший член по отношению к среднему выразить каким-либо числом, даже если больший член рационален, поэтому они всегда будут иррациональны, как будет ясно из дальнейшего.

ГЛАВА VIII

Как мы понимаем количество, разделенное согласно пропорции, имеющей середину и два края

Мы должны хорошо знать, что для того, чтобы разделить количество согласно пропорции, имеющей середину и два края, надо образовать две такие неравные части, чтобы произведение меньшей на всю неразделенную величину было равно квадрату большей части. И хотя иногда вместо деления данного количества согласно пропорции, имеющей середину и два края, мы хотим лишь образовать две части с таким условием, чтобы произведение одной части на всю данную величину было равно квадрату другой части, тот, кто хорошо это понимает и является экспертом в данной области, должен свести предложение к нашей пропорции, потому что это никаким другим способом не может быть истолковано. Например, когда говорят: «Разделим 10 на две части так, что, умножая одну часть на 10, мы получим столько, сколько умножая другую часть на саму себя» и рассматривают этот случай и ему подобные в соответствии с предписаниями спекулятивной практики алгебры, или альмукабалы, и с правилом, которое мы по этому вопросу поместили в нашей работе, то получают следующее решение: меньшая часть равна 15 без корня из 125, а большая часть равна корню из 125 без 5. Части, описанные таким образом, иррациональны, и в искусстве они называются вычетами, коих насчитывается 6 видов. Обычно эти части выражаются следующим образом: меньшая равна 15 за вычетом корня из 125. Это означает, что, принимая корень из 125 за число немного большее, чем 11, и вычитая его из 15, мы получим чуть более 3, или чуть меньше 4. А большая часть выражается так: корень из 125 за вычетом 5, и это означает, что, принимая корень из 125 за число немного большее, чем 11, как уже было сказано, и вычитая из него 5, мы получим разность чуть более 6, или чуть меньше 7. Но подобные действия умножения, сложения, вычитания и деления вычетов, двучленов, биномов, корней и прочих рациональных и иррациональных количеств, сложенных и разложенных разными способами, уже были рассмотрены в нашем предыдущем сочинении, и я не стану их повторять в этом трактате, так как мы намереваемся говорить лишь о новых предметах и не возвращаться к уже сказанному.

Для любого количества, разделенного таким образом, всегда имеются три члена, упорядоченные по непрерывной пропорциональности, так что один член будет общим разделенным количеством, то есть большим краем, которым *в нашем случае является 10, а другой член будет большей частью, то есть средним, в нашем случае корень из 125 за вычетом 5, а третий — меньшим, то есть 15 за вычетом корня из 125. Между ними получится та же самая пропорция, в которой первый член так относится ко второму, как второй к третьему, и обратно: третий ко второму как второй к первому. И если мы умножим меньший член, 15 за вычетом корня из 125, на больший, 10, будет то же самое, как если мы умножим средний член, то есть корень из 125 за вычетом 5, сам на себя, так как каждое умножение дает нам 150 за вычетом корня из 12500, как и утверждает наша пропорция. Поэтому мы говорим, что 10 разделено в пропорции, имеющей середину и два края, с большей частью, равной корню из 125 за вычетом 5 и с меньшей — 15 за вычетом корня из 125, и обе части иррациональны. И это все, что можно сказать о количестве, разделенном таким образом.*

«Начала» Евклида

Шестая книга «Начал» Евклида содержит евдоксову теорию пропорций и планиметрию. В этой книге Евклид излагает теоремы подобия треугольников и построение третьего, четвертого и среднего пропорционального. Это первое описание золотой пропорции в математике. Оно дано в Определении 3 в наиболее классической форме, как «крайнее и среднее отношение», а в Предложении 30 Евклид приводит пример деления отрезка в золотой пропорции.

Книга VI

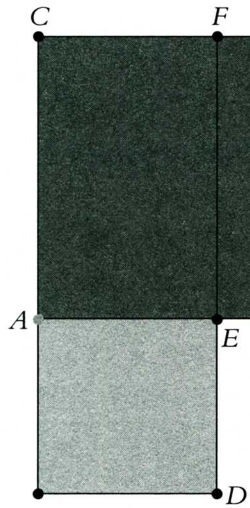
Определения
3. Говорится, что прямая делится в крайнем и среднем отношении, если целое относится к большему отрезку как больший отрезок к меньшему.

Предложения
Предложение 30. Данную ограниченную прямую рассечь в крайнем и среднем отношении.

Пусть данная ограниченная прямая будет AB.

Тогда требуется рассечь прямую AB в крайнем и среднем отношении.

Построим на AB квадрат BC и приложим к AC равный BC параллелограмм CD с избытком — фигурой AD, подобной BC.



BC же есть квадрат; значит, и AD квадрат. И поскольку BC равен CD, то отнимем от обоих общее CE; значит, оставшийся параллелограмм BF равен оставшемуся параллелограмму AD. И оба равноугольны; значит, в BF и AD стороны при равных углах обратно пропорциональны; следовательно, как и FE к ED, то и AE к EB. Но FE равна AB, и ED равна AE. Значит, как и BA к AE, так и AE к EB. Но AB больше AE; значит, и AE больше EB.

Значит, прямая AB рассечена в E в крайнем и среднем отношении, и больший ее отрезок AE.

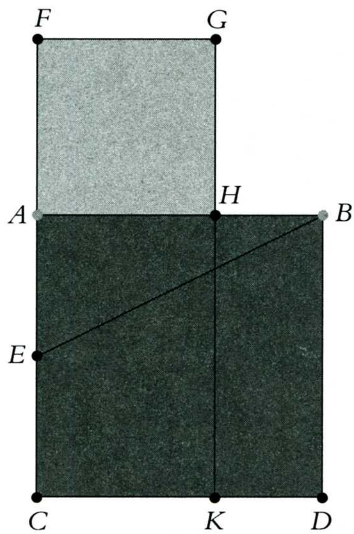
Хотя именно в шестой книге рассказывается о золотом сечении, Евклид уже упоминал эту пропорцию в предложении 11 второй книги, где он пытается решить геометрическим способом уравнение $(a - x) = x^2$. Фактически это предложение аналогично предложению 30 из шестой книги, отличие лишь в терминологии. Можно сказать, что предложение 11 второй книги является первым предложением, в котором появляется золотое сечение, но автор, похоже, хотел уделить этим вопросам больше внимания позже. Во второй книге Евклид скрывает их под задачей о прямоугольниках. В любом случае, он этим демонстрирует, что любая задача, связанная с пропорциональными отрезками, может быть сформулирована как задача о прямоугольниках.

Книга II

Предложение 11. *Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.*

Пусть данная прямая будет AB.

Следовательно, требуется AB рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.



Надстроим на AB квадрат ABDC и рассечем AC пополам в точке E и проведем BE. Продолжим CA до F, отложим EF, равную BE. Надстроим на AF квадрат FH и продолжим GH до K.

Поскольку AC рассечена пополам в E и к ней прикладывается FA, то значит, прямоугольник, заключенный между CF, FA вместе с квадратом на AE, равен квадрату на EF. EF же равна EB; значит, прямоугольник между CF, FA, вместе с квадратом на AE, равен квадрату на EB. Но квадрату на EB равны квадраты на BA и AE, ибо угол при A прямой; значит, прямоугольник между CF, FA вместе с квадратом на AE равен квадратам на BA и на AE. Отнимем общий квадрат на AE; остающийся прямоугольник, заключенный между CF, FA равен квадрату на AB. И прямоугольник между CF, FA есть FK, ибо AF равна FG;

квадрат же на AB есть AD; значит, FK равно AD. Отнимем общий AK, значит, остаток FH равен HA. И HA есть прямоугольник между AB, BH, ибо AB равна BD; FH же есть квадрат на AH; значит, прямоугольник, заключенный между AB и BH, равен квадрату на HA.

Значит, данная прямая AB рассечена в H так, что прямоугольник, заключенный между AB и BH, она делает равным квадрату на HA.

Фибоначчи и его «Книга абака»

«Книга абака» Фибоначчи — довольно объемная работа, наполненная интересными задачами из арифметики и алгебры, с которыми ее автор сталкивался в путешествиях. Намерение Фибоначчи заключалось в том, чтобы продемонстрировать преимущества индо-арабской десятичной системы, а также способствовать ее распространению в Европе. В первом параграфе его книги впервые для Запада появились цифры, которые мы используем и сегодня.

Девять индийских чисел: 987654321.

С помощью этих девяти чисел и со знаком нуля, который арабы называют зефиром, любое другое число может быть записано, как мы покажем ниже. Число является суммой единиц, и при их добавлении число может увеличиваться без конца. Сначала получаются эти числа, от одного до десяти. Потом из десятков мы строим числа от десяти до ста. Затем из сотен мы строим числа от ста до тысячи... И таким образом, в бесконечной последовательности шагов, любое число может быть построено объединением предыдущих чисел. Первая цифра пишется с правой стороны. Вторая цифра следует за первой слева.

«Индийские» числа Фибоначчи были индо-арабской системой счисления. Он писал их справа налево, как при арабском письме. Революционное значение этой системы счисления заключается не только в практической пользе. Фибоначчи озвучил очень важную идею — понятие нуля.

В главе XII описана задача, которая и прославила Леонардо Пизанского — размножение кроликов. Здесь мы приводим оригинальный текст и пометки автора на полях.

Начало, 1

У одного человека была пара кроликов в загоне, окруженном со всех сторон стеной, и он захотел узнать, сколько кроликов может родиться от этой пары в течение года, учитывая, что по своей природе кролики могут производить на свет пару кроликов каждый месяц и каждая новая пара готова родить в следующем месяце.

Первый месяц, 2

Когда первая пара рожает в первый месяц, количество кроликов удваивается, у человека будет 2 пары через один месяц.

Второй, 3
Третий, 5
Четвертый, 8
Пятый, 13
Шестой, 21
Седьмой, 34
Восьмой, 55
Девятый, 89
Десятый, 144
Одиннадцатый, 233
Двенадцатый, 377

Одна из пар, та, что была первой, производит на свет пару во второй месяц, а значит, во второй месяц имеется 3 пары; из них через месяц две беременны, так что в третьем месяце рождается две пары кроликов, а значит, в этот месяц имеется 5 пар; три пары беременны в четвертый месяц, так что имеется 8 пар в четвертый месяц, из которых пять пар производят на свет пять других пар; они добавляются к предыдущим восьми и получается 13 пар в пятом месяце; эти пять пар, которые родились в этом месяце, не спариваются, но другие восемь пар беременны, так что имеется 21 пара в шестой месяц; к ним мы должны добавить тринадцать пар, которые рождаются в седьмом месяце, так что будет 34 пары в этом месяце; к ним мы должны добавить двадцать одну пару, которые родились в восьмом месяце, что дало 55 пар в этот месяц; нам придется добавить тридцать четыре пары, которые родились в девятом месяце, и теперь в этот месяц имеется 89 пар; к ним мы снова добавим пятьдесят пять пар, родившихся в десятом месяце, и получится 144 пары в этом месяце; мы снова добавим восемьдесят девять пар, родившихся в одиннадцатом месяце, так что у нас будет 233 пары в этом месяце. К ним мы добавим сто сорок четыре пары, родившихся в последнем месяце. К концу года пара, с которой мы начали, произведет на свет 377 пар кроликов.

Как видно из пометок на полях, метод, который мы использовали, заключается в следующем: мы добавляли первое число ко второму, то есть 1 к 2, а второе к третьему, третье к четвертому, четвертое к пятому и так далее, одно за другим, наконец, мы добавили десятое к одиннадцатому, то есть 144 к 233, и получили количество кроликов, указанное выше, то есть 377, которое может продолжать увеличиваться для бесконечного числа месяцев.

Ряд чисел, представленный в этой задаче, и отношение, с которым он растет, впоследствии был назван «последовательностью Фибоначчи», хотя автор не знал, что она будет носить его имя, поскольку он, вероятно, получил это прозвище много столетий спустя. В самом деле, например, Кеплер упоминает «числа Пизанского» в работе, опубликованной в 1611 г. и описывающей их отношения сложным образом: «как 5 относится к 8, а 8 к 13, а 13 к 21».

Более ста лет спустя Жак Бине (1786–1856) вывел формулу для нахождения любого числа в последовательности Фибоначчи по его индексу. По формуле Бине мы можем найти, например, сто восемнадцатое число в последовательности Фибоначчи, не вычисляя предыдущих чисел. Вывод формулы Бине довольно сложен, поэтому мы расскажем о нем кратко, а затем дадим пример применения формулы.

Последовательность Фибоначчи определена рекуррентно, то есть мы должны вычислить несколько предшествующих членов, чтобы найти тот или иной член. Если числа Фибоначчи определяются по формулам

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ для } n = 2,3,4,5...$$

то эти уравнения определяют рекуррентное соотношение:

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0.$$

Заинтересованный читатель может обратиться к основному тексту книги, где шаг за шагом это соотношение приводится к отношению F_{n+1}/F_n, предел которого называется Φ, или золотой пропорцией. Там же появляется выражение

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

которое является отправным пунктом последующих арифметических преобразований. Бине пришел к формуле

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right]$$

довольно трудоемким способом, который мы не будем здесь приводить.

Подставляя значение Φ в формулу $\left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right]$, мы получим следующее выражение, содержащее действительные числа:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right] = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Список литературы

Conway, J. H. and R. K. Guy: The Book of Numbers. New York, Copernicus, 1996.

Corbalán, F.: La Matemática Aplicada a la Vida Cotidiana. Barcelona, Graó, 1995.

Corbalán, F.: Números, Cultura y Juegos. Tu Mundo y las Matemáticas. Madrid, Editorial Videocinco, 1996.

Corbalán, F.: Matemáticas de la Vida Misma. Barcelona, Graó, 2007.

Ghyka, M. C.: Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes, Barcelona, Editorial Poseidón, S. L., 1977.
Издание на русском языке: Гика М. Эстетика пропорций в природе и искусстве. — М.: Издательство Всесоюзной академии архитектуры, 1936.

Ghyka, M. C.: El Número de Oro. I. Los Ritmos. II. Los Ritos. Barcelona, Poseidón, 1978.

Huntley, H. E.: The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty. New York, Dover Publications, 1970.

Linn, C. F.: The Golden Mean: Mathematics and the Fine Arts. New York, Doubleday & Company, Inc., 1974.

Livio, M.: La Proporción Áurea. Barcelona, Ariel, 2006.

Moreno, R.: Fibonacci. El Primer Matemático Medieval. Madrid, Nivola, 2004.

Pacioli, L.: La Divina Proporción, Introducción A. M. González. Madrid, Akal, 1987.

Steen, L. A. et al.: Matemáticas en la Vida Cotidiana. Madrid, Addison-Wesley, UAM, 1999.

Wells, D.: The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry. London, Penguin, 1991.

Алфавитный указатель

Научно-популярное издание
Выходит в свет отдельными томами с 2014 года
Мир математики
Том 1
Фернандо Корбалан
Золотое сечение.
Математический язык красоты

РОССИЯ
Издатель, учредитель, редакция:
ООО «Де Агостини», Россия
Юридический адрес: Россия, 105066,
г. Москва, ул. Александра Лукьянова, д. 3, стр. 1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.
Генеральный директор: Николаос Скилакис
Главный редактор: Анастасия Жаркова
Старший редактор: Дарья Клинг
Финансовый директор: Наталия Василенко
Коммерческий директор: Александр Якутов
Менеджер по маркетингу: Михаил Ткачук
Менеджер по продукту: Яна Чухиль

Для заказа пропущенных книг и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт www.deagostini.ru, по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной горячей линии в России:
☏ 8-800-200-02-01
Телефон горячей линии
для читателей Москвы:
☏ 8-495-660-02-02
Адрес для писем читателей:
Россия, 170100, г. Тверь, Почтамт, а/я 245,
«Де Агостини», «Мир математики»
Пожалуйста, указывайте в письмах свои контактные данные для обратной связи (телефон или e-mail).
Распространение:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»
УКРАИНА
Издатель и учредитель:
ООО «Де Агостини Паблишинг» Украина
Юридический адрес: 01032, Украина,
г. Киев, ул. Саксаганского, 119
Генеральный директор: Екатерина Клименко
Для заказа пропущенных книг и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт www.deagostini.ua, по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной горячей линии в Украине:
☏ 0-800-500-8-40
Адрес для писем читателей:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини»,
«Мир математики»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»
БЕЛАРУСЬ
Импортер и дистрибьютор в РБ:
ООО «Росчерк», 220037, г. Минск,
ул. Авангардная, 48а, литер 8/к,
тел./факс: +375 17 331 94 27
Телефон «горячей линии» в РБ:
☏ + 375 17 279-87-87 (пн—пт, 9.00—21.00)
Адрес для писем читателей:
Республика Беларусь, 220040, г. Минск,
а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини»,
«Мир математики»
КАЗАХСТАН
Распространение:
ТОО «КГП «Бурда-Алатау Пресс»

Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую розничную цену книг. Издатель оставляет за собой право изменять последовательность заявленных тем томов издания и их содержание.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии:
Grafica Veneta S.p.A Via Malcanton 2
35010 Trebaseleghe (PD) Italy
Подписано в печать: 29.07.2013
Дата поступления в продажу на территории России: 07.01.2014
Формат 70 x 100 / 16. Гарнитура «Academy».
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 5.
Усл. печ. л. 6,48.
Тираж: 270 000 экз.

ISBN 978-5-9774-0682-6
ISBN 978-5-9774-0641-3 (т. 1)

12+ Данный знак информационной продукции размещен в соответствии с требованиями Федерального закона от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию».
Издание для взрослых, не подлежит обязательному подтверждению соответствия единым требованиям, установленным Техническим регламентом Таможенного союза «О безопасности продукции, предназначенной для детей и подростков» ТР ТС 007/2011 от 23 сентября 2011 г. № 797.

Золотое сечение

Математический язык красоты

Можно ли выразить красоту с помощью формул и уравнений? Существует ли в мире единый стандарт прекрасного? Возможно ли измерить гармонию с помощью циркуля и линейки? Математика дает на все эти вопросы утвердительный ответ. Золотое сечение — ключ к пониманию секретов совершенства в природе и искусстве. Именно соблюдение «божественной пропорции» помогает художникам достигать эстетического идеала. Книга «Золотое сечение. Математический язык красоты» открывает серию «Мир математики» — уникальный проект, позволяющий читателю прикоснуться к тайнам этой удивительной науки.

ISBN 978-597740641-3

9 785977 406413

12+

Следующий том в продаже через неделю!