ИЗВЕСТИЯ
Уральского государственного университета

№ 3(79), 2010. Гуманитарные науки. Искусствоведение и культурология

ИСКУССТВОВЕДЕНИЕ И КУЛЬТУРОЛОГИЯ

УДК 78.02 + 781.4

А. М. Раскин

ГЕОМЕТРИЯ ЗВУКОРЯДА

Рассматриваются особенности звукоряда (ряда октав), представляющие интерес с точки зрения общей теории пропорций. Для выявления этих особенностей используются не декартовы, как обычно, а полярные координаты. График звукоряда в этом случае предстает в виде логарифмической спирали, обладающей набором впервые наблюдаемых свойств, прежде не изученных.

К л ю ч е в ы е с л о в а: звукоряд, октава, логарифмическая спираль.

Прежде чем знакомить читателя с результатами исследования, представляющимися его автору интересными и, возможно, полезными, необходимы несколько предваряющих слов. Во-первых, стоит предупредить, что к математике и музыке автор никакого профессионального отношения не имеет. И если некоторые элементарные математические знания еще сохранились в памяти, то угадать мелодию, глядя на ноты, для него то же самое, что прочесть китайские иероглифы, не имея представления о языке. Увы, так сложилось. Поэтому статья не о математике (хотя и теплится надежда, что кое-что может показаться любопытным) и не о музыке, поэтому не для музыкантов (разве что лишь для тех из них, кто почитает столь ненавистную студентам теорию гармонии).

Среди читателей вижу (возможно, это благостная иллюзия) эстетиков, искусствоведов, архитекторов. Последних — в первую очередь, поскольку представители этой братии более других причастны к проблемам пропорционирования, гармонизации зримой формы. Раньше этим занимались и теоретики искусств, и художники. Но то было раньше. Ныне эту эстафету скорее всего подхватят дизайнеры, поскольку ныне дизайн проник во все сферы. Икебана уже не декоративное искусство, а дизайн — как, возможно, макияж или зубное протезирование. Экспансия дизайна не знает границ, этимология слова все оправдывает.

Из сказанного можно догадаться, что речь пойдет преимущественно о неких законах формообразования.

Сразу же стоит оговориться: сформулированных законов гармонии нет, как нет, тем более, ее общей теории. Частные есть (у музыкантов, например), а вот общей нет и, по всей видимости, не скоро родится. Это как у химиков: сначала многовековой эмпирический опыт алхимиков и их последователей, а уж потом периодический закон Менделеева. Возможно, подобное чудо ожидает нас с появлением теории гармонии. Прогресс науки стремителен, его можно сравнить с ростом частот в звукоряде... но не будем опережать события.

Эта статья и не искусствоведческая, об искусстве в ней — ни слова. Поскольку ни слова о такой категории, как «прекрасное». Речь пойдет о красоте. Причем о красоте как объективной характеристике формы, о той самой, о которой «не спорят». Вечный спор о красоте и прекрасном сводится в конечном итоге к разговору лишь о прекрасном (как, например, в книге Олега Буткевича «Красота» [см.: Буткевич]). В свете затрагиваемой проблемы «природническая» позиция Сократа гораздо ближе позиции автора, который, вольно перефразируя великого философа, полагает, что красота — показатель степени совершенства системы. Под системой при этом понимается любой автономный объект, оптимально функционирующий в определенных условиях.

При подобном взгляде на мир таракан, столь противный почти всем (кроме, разумеется, биологов), некрасив, а вот божья коровка — другое дело. Уж о мышах и крысах (извините за упоминание) и говорить не приходится. О какой красоте, мне скажут, можно говорить?! Я же присоединяюсь к точке зрения биологов. Упомянутые твари так же красивы, как и дельфины, ласточки, цветы, наконец. Причина негативного отношения к их облику в том, что «отношения не сложились». Так уж вышло. Но стоит поменять местами таракашек и божьих коровок, представить себе первых на лесных полянах, а вторых — на кухонных столешницах, как наши представления о том, кто из них красив, радикально изменятся. Это к разговору об объективности красоты. «Прекрасное» же (как и ему обратное — безобразное) целиком связано с «добром» и «злом», т. е. «очеловечено», стремится ускользнуть из эстетики в этику. Греческая калокагатия, как известно, понятия прекрасного и красоты не разделяла (красота — одна из составляющих). Время этот синтез разрушило, и посему Квазимодо — прекрасный человек.

Упреки в адрес «гармонизаторов» всех веков чаще всего бывают справедливы, поскольку они, обнаружив замечательные геометрические закономерности, произвольно налагали их на «подходящие» объекты, не замечая другие. Самый простой пример тому — трактат «О божественной пропорции» Луки Пачоли, оформленный Леонардо да Винчи. Ставшая просто «золотой», эта пропорция неизменно привлекала самое пристальное внимание целой плеяды исследователей, которые искренне видели в ней «ключ» к решению проблемы гармонии, забывая при этом, что «замков» гораздо больше. Иная точка зрения — редкость.

А. В. Радзюкевич в одной из своих статей «Красивая сказка о “золотом сечении” упоминает имя В. П. Зубова, который в своем труде «Архитектурная теория Альберти» аргументирует ошибочность сложившегося взгляда на роль «золота» и других догматизированных отношений [см. об этом: Радзюкевич]. Очевидно, что и «золото», и «египетский треугольник», и замечательная пропорция Порстмана ($1 : \sqrt{2}$), воплощенная в форматах бумаги, на которой мы обычно пишем и чертим, и многие другие — та самая «алхимия», без которой система не может обнаружить себя [см., например: Хэмбидж; Мессель; Шевелев и др.; Волошинов].

Одна из причин ошибок в цепи находок — несовершенство наших органов чувств. Можно ли сравнить остроту зрения человека и орла, обоняние человека и собаки, слух человека и летучей мыши? Можно ли «на глазок» определить точность формата бумаги? В простых случаях способны сориентироваться: отличим прямую от кривой, круг от эллипса или овала, прямой угол от тупого или острого. Хуже с цветами или оттенками. Глаз «обманываться рад». А вот ухо человеческое, при том что в остроте уступает подобным органам многих тварей, не улавливая ни ультра-, ни инфразвуков, в определенном диапазоне (его иллюстрирует фортепианная клавиатура) ориентируется просто фантастически точно. Исключения из этой нормы констатируются известной фразой «медведь на ухо наступил». Фальшь легко обнаруживают не только профессионалы-музыканты, но и самые обычные люди. Уши же профессионалов оказывались точнее самых чутких физических приборов, как показали эксперименты в акустической лаборатории при Московской консерватории (среди «подопытных», кстати, был и Давид Ойстрах). С одним и тем же успехом нарушения законов музыкальной гармонии обнаруживают жители Исландии и Перу, Португалии и Ямайки. О существовании законов гармонии знали уже древние греки. Первыми «алхимиками» стали пифагорейцы.

От блестящих изображений животных в Великих пещерах нас отделяют более 20 тысяч лет. От греческих ладов до «Хорошо темперированного клавира» Баха — расстояние в десять раз меньшее.

Возможно, поэтому видимые объекты соизмеряют с древнейших времен (достаточно вспомнить рельефное изображение египетского зодчего Хесиры с мерными палочками в руках). И обилие исследований, направленных на решение загадки гармонии, посвящены лишь плоскости и объему. Несовершенство глаза как измерительного прибора — одна из причин медленного накопления необходимого для обобщений эмпирического опыта.

Не может ли более точный «измерительный прибор» — ухо — помочь глазу? Эта задача встала во весь рост после знакомства с работами математиков, вторгшихся в область музыки. «Увидеть» закономерности оказалось не просто затруднительно, но, как показалось, и невозможно. Все иллюстрации этого можно свести к двум-трем графикам и схемам, иллюстрирующим основные выводы, но не позволяющие сопоставить их с уже наработанными в теории пропорций, а тем более вскрыть отношения в гармонических сочетаниях (например, аккордах).

Закономерность, которой подчиняется звукоряд, лучшим образом «объективирована» фортепианной клавиатурой (ил. 1). На вертикалях полутонов, расположенных на абсциссе, отмечены значения присущих им частот. Эти величины — данные, полученные в акустических лабораториях. Определенные закономерности легко прочитываются: частота каждой ноты с шагом в октаву увеличивается в два раза. Все значения частот располагаются на гиперболе, уравнение которой позволяет вычислить частоту любой ноты. Одно неудобство: эти уравнения каждый раз будут меняться в зависимости от выбранного шага на координатной оси. Возможность увидеть отражение каких-либо законов гармонии, кроме удвоения частот с интервалом в октаву, исключается.

В этом случае график — функция аргумента, т. е. физических данных.

Представляется небезынтересным функцию превратить в аргумент и наоборот, т. е. создать для начала такой график, который автоматически представит значения частот всего звукоряда.

Здесь нет необходимости рассказывать обо всех шагах в этом направлении. Их было много, в том числе и чисто интуитивных.

Важнее итог — искомый график. Он так же элементарен, как элементарно деление отрезка в «золоте», которое в свое время не удалось самому Дюреру. Сейчас этот факт может удивить. Представленный нами график звукоряда (ил. 2) получился не сразу, порой казалось, что эта задача так же невыполнима, как и попытка деления угла на три равных (кроме, естественно, прямого).

Решение подсказал цветовой круг, а не «цветовой ряд», в основе которого не декартовы, а полярные координаты.

На лучах, исходящих из единого центра — полюса, число которых равно числу тонов и полутонов октавы, откладывается условное значение частоты первого из них, т. е. do_1. Следующая точка откладывается на этом же луче на удвоенном расстоянии от полюса, исходя из уже известного факта удвоения числа частот, т. е. $do_2 = 2\ do_1$. Компьютер с успехом выполняет операцию сопряжения этих точек. Каждый последующий виток полученной спирали пересекает лучи в точках, удваивающих расстояние от центра.

В этом случае важны не полученные в акустической лаборатории значения частот той или иной ноты, а их взаимоотношения. Двенадцать шагов, которые проделывает единица к своему удвоению, можно рассчитать с необходимой точностью (к сожалению, как и в случае с $\sqrt{2}$, мы всегда будем иметь примерную величину).

Эти двенадцать шагов в графике представляют пересечения лучей одним витком спирали — от do_1 к do_2. Следующий виток — значения частот следующей октавы — будут простым удвоением частот предыдущей.

Налицо звукоряд, значения частот которого растут в геометрической прогрессии с $К \approx 1{,}059463101$ (1,059 или 1,06). Рассмотрение звукоряда в пределах одной октавы обнаруживает любопытные отношения его участков, заключенных между отдельными тонами и полутонами. Как видно из ил. 3, где представлена произвольная октава (от do_1 до do_2), участок в 6 интервалов (от do_1 до $fa^{\#}$) равен участку в 4 интервала (от $sol^{\#}$ до do_2). Так же равны участки и в 8 интервалов (от do_1 до $sol^{\#}$), и в 6 (от $fa^{\#}$ до do_2). Во втором случае — участок в 2 интервала ($fa^{\#}$—sol и sol—$sol^{\#}$) оказывается для них общим. При этом отношение первых шести интервалов (от do_1 до $fa^{\#}$) к следующим шести (от $fa^{\#}$ до do_2) равно $1 : \sqrt{2}$. Участок же do_1—$fa^{\#} = \sqrt{2} - 1$.

Удивительно красива эта логарифмическая спираль (при том, что некрасивых спиралей не бывает)[1]. Какие имена связаны с ее изучением... Пораженный красотой открытой им логарифмической спирали, Яков Бернулли завещал изобразить ее на своем могильном камне («Измененная, я воскресаю тотчас же»). Продолжили ее изучение брат Якова Иоганн, а также Декарт, Торричелли. Обретшая наконец собственное уравнение, логарифмическая спираль заняла прочное место среди других, а ее варианты — в трудах теоретиков пропорций. Так, например, Матила Гика выделяет три типа логарифмических спиралей, но они имеют иные, чем у описываемой, характеристики [см.: Гика, *119—122*].

Как ни странно, ни в одном математическом справочнике представленная здесь спираль, которая, как кажется, должна была бы привлечь внимание, не упоминается.

Обладающая каскадом замечательных геометрических свойств, она, в отличие от графика в декартовых координатах, позволяет легко находить гармонические сочетания — аккорды. При этом различные их виды — трезвучия, септаккорды (созвучия четырех нот), нонаккорды (из пяти) и т.д. обретают вполне определенную геометрическую интерпретацию. Поскольку аккорды — основные элементы гармонии, их графическое отображение позволяет обнаружить сумму закономерностей, связанных с каждым их видом. В качестве примера можно представить графики простейших из них — трезвучий, и не всех из звукоряда, а лишь трех первых из ряда консонансных (где основные тоны — do, re и mi). На ил. 4 — по шесть консонансных аккордов для первых трех основных тонов октавы (щадя читателя, не будем представлять диссонансные аккорды, строящиеся по такому же принципу).

Показать в рамках этой статьи графики всех видов аккордов (тем более — диссонансных) невозможно, это самостоятельная тема. Тем не менее даже эти три примера позволяют сразу же отметить бросающиеся в глаза закономерности: повторяемость углов, образуемых «лучами» каждой группы, вне зависимости от основного тона, наличие в схемах каждого из аккордов касательных к виткам спирали.

Особенности этой «гармонической» спирали явно не ограничиваются возможностью демонстрировать «геометрию» музыки. Ее собственная геометрия не менее удивительна.

Среди свойств описываемой спирали — ряд достойных внимания. Так, например, касательные в пределах одного витка, ограниченные следующим витком и образующие неправильную ломаную, будут находиться в отношении 4 : 5, а углы, ими образуемые, равны 60 град. Точка касания каждого из отрезков касательных, в свою очередь, делит его в отношении 4 : 5 (ил. 5). Отношение отрезков лучей, находящихся в пределах одного витка и расположенных на одной линии, аналогично отношению стороны квадрата к его диагонали, т. е.

[1] Нарисованная поначалу от руки, эта спираль впервые обрела настоящий облик на экране компьютера в лаборатории лингвистики МГУ при доброжелательном участии её сотрудников. Статус же логарифмической окончательно подтвердили на кафедре алгебры и дискретной математики УрГУ. Спасибо и тем и другим.

$1 : \sqrt{2}$ (ил. 6). Перечень характеризующих спираль свойств этим не ограничивается[2].

Уже безотносительно спирали, интересен и прямоугольник, описанный вокруг ее витка (ил. 7), занимающий срединное положение между квадратом и прямоугольником $1 : \sqrt{2}$. Ритмический ряд, образуемый при этом «замечательными» прямоугольниками (ил. 8), геометра (и не только его) равнодушным оставить не может.

Интересным представляется способ получения звукоряда, хотя и не очень корректный, но позволяющий получать практически близкие значения, т. е. коэффициент геометрической прогрессии $\approx 1{,}06$.

Если для получения формата бумаги используются сторона и диагональ квадрата, равная $\sqrt{2}$, для деления отрезка в прямом и кратном отношении (в т. н. «золотом» отношении) используются два квадрата и их диагональ (= $\sqrt{5}$), то для получения значений звукоряда уже пригодится прямоугольник в три квадрата, длинная сторона которого ($\sqrt{9}$) позволяет легко получить и значение $\sqrt{8}$, т. е. $2\sqrt{2}$ (ил. 9). Дальнейшее развитие событий представляет ил. 10.

Значения частот, полученные этим способом, не будут отличаться от обычно публикуемых, где после запятой стоит, как правило, лишь два знака (например, частота do_1 = 261,60 Гц).

Однако при всей привлекательности графиков, отражающих те или иные свойства звукоряда, принципиально важным представляется вопрос о его месте в гипотетической общей теории гармонии, в орбите которой и свойства материи (физика), и формообразование в природе (кристаллография, биология и т. д.). Первые данные, пока не подтвержденные точными расчетами и лабораторными исследованиями, уже обнадеживают.

Калька с вычерченной спиралью, наложенная на круглую древнюю раковину в куске породы четко обозначила ось каждого ее витка. Примерно тот же результат оказался при сравнении чертежа со спиралью, образованной водоворотом («лабораторным прибором» в этом случае была ванна с опилками на поверхности заполнявшей ее воды).

Куда более серьезным представляется опыт, проведенный в стенах лаборатории одного из оборонных предприятий по просьбе автора этой статьи, результаты которого составили содержание курсовой работы «Вопросы создания нетрадиционного цветового круга», написанной еще в 1993 г.[3]

Смешная и одновременно самая важная сторона «вопроса» в том, что ничего общего с традиционным цветовым кругом, созданным еще Гете или Шеврелем, полученная фигура не имела. Видимый спектр уместился в одном завитке

---

[2] Теоремы (если их можно так назвать), сформулированные на основании графических изображений, были доказаны в свое время (1998) студенткой математико-механического факультета УрГУ (кафедра алгебры и дискретной математики) О. Шейниковой.

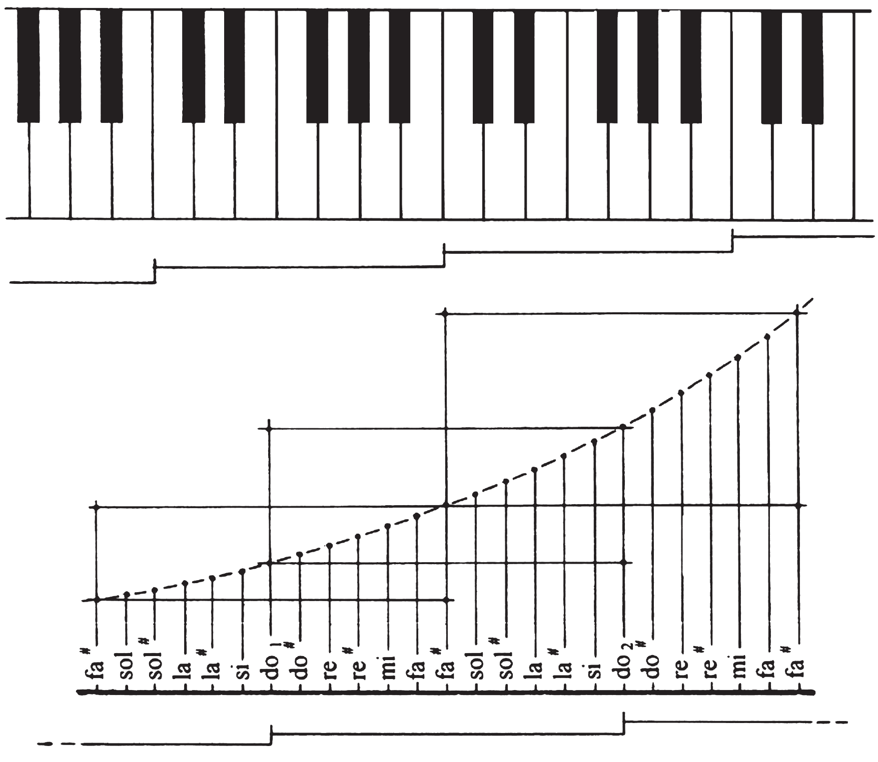
[3] Автором курсовой работы была студентка И. Килочек (по первому образованию — физик), программная часть компьютерной графики была выполнена сотрудником лаборатории — кандидатом технических наук Е. Г. Крушель. Имела ли продолжение эта работа, неизвестно, т. к. предприятие было закрытым.

спирали, почти один к одному повторившем представленный здесь виток октавы. На недоуменный вопрос автора курсовой «а что в других витках?» пришлось ответить: «К центру — инфра-, а вовне — ультра-». На том и помирились. Кроме полученной плоской «запятой» (или «улитки», как ее назвали сами лаборанты), появилось и ее пространственное изображение, где точка полярных координат предстала в виде оси, а сама спираль превратилась в повторяющиеся лопасти винта, поскольку отражение получила такая характеристика, как яркость.

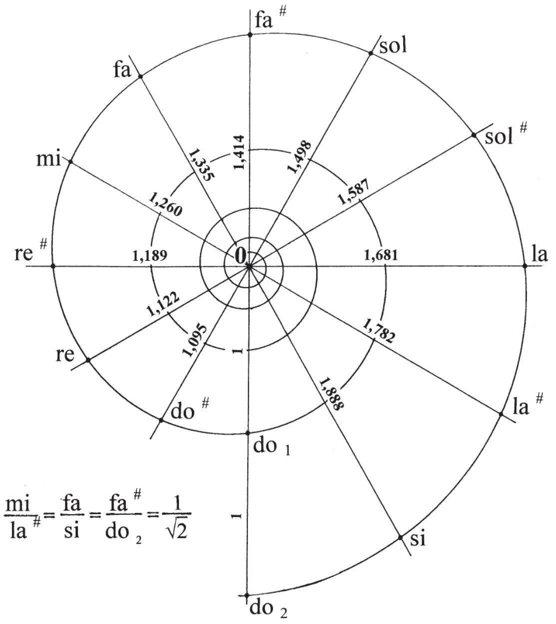
В этом случае применительно к спирали звукоряда аналогом может быть сила звука, т. е. уже не частота, а амплитуда, которая может точку превратить в ось.

Вывод, который можно сделать из всего вышесказанного, напрашивается сам собой: объективные законы природы, столь четко интерпретированные в графиках звукоряда, представляют не только эстетическую ценность, но могут иметь и м е ж д и с ц и п л и н а р н ы й х а р а к т е р, использоваться в других областях знания, не имеющих на первый взгляд к музыке никакого отношения.

Гипотетические участники лаборатории подобного знания — это не только искусствовед и математик, но и физик, и биолог, и, возможно, даже астроном и музыкант.

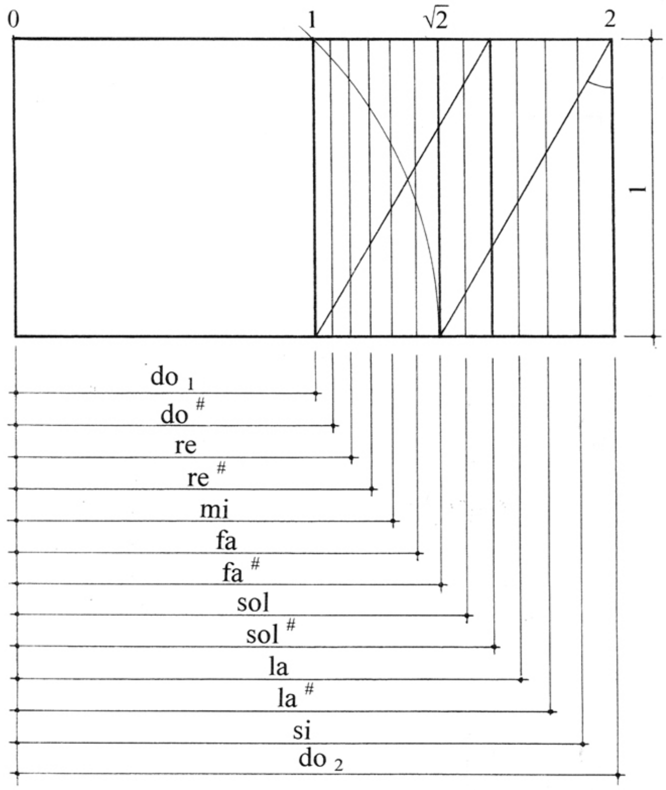


1. График частот звукоряда в декартовых координатах

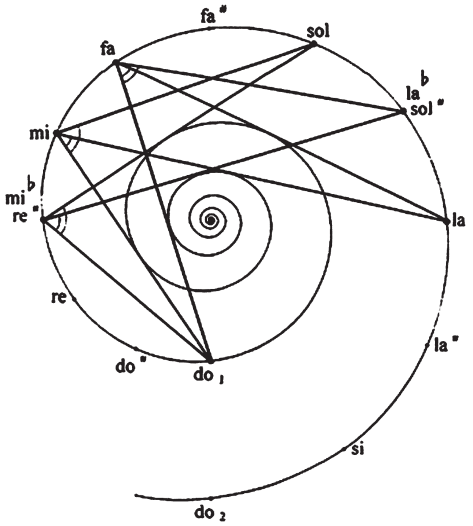


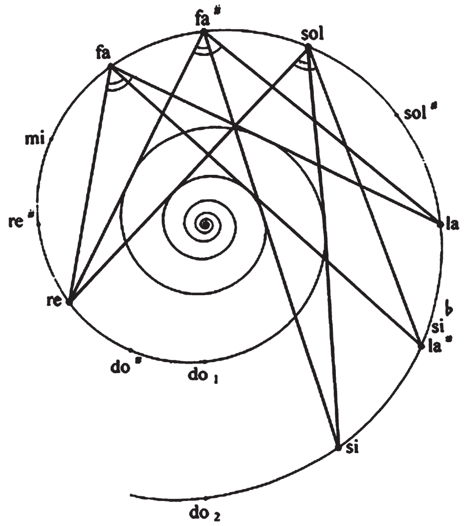
$$\frac{do}{fa^{\#}}=\frac{do^{\#}}{sol}=\frac{re}{sol^{\#}}=\frac{re^{\#}}{la}=\frac{mi}{la^{\#}}=\frac{fa}{si}=\frac{fa^{\#}}{do_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

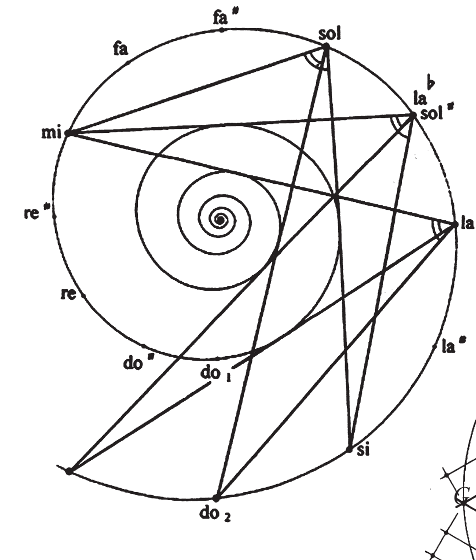
2. График частот звукоряда в полярных координатах



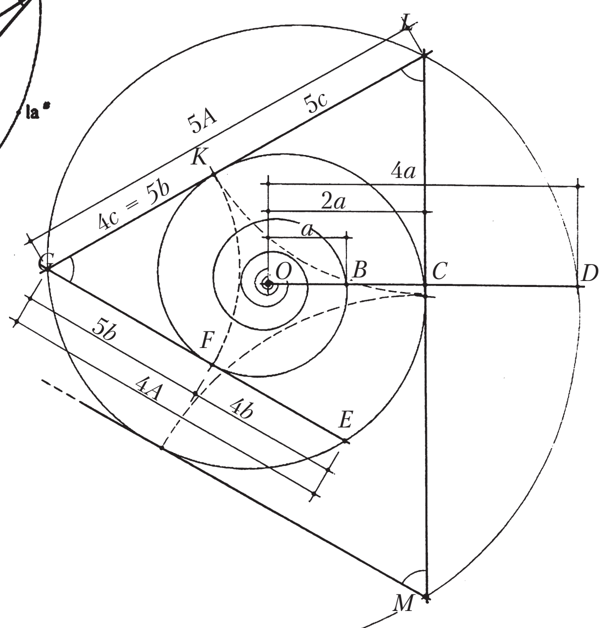
3. Схема совпадения сумм частот в пределах октавы



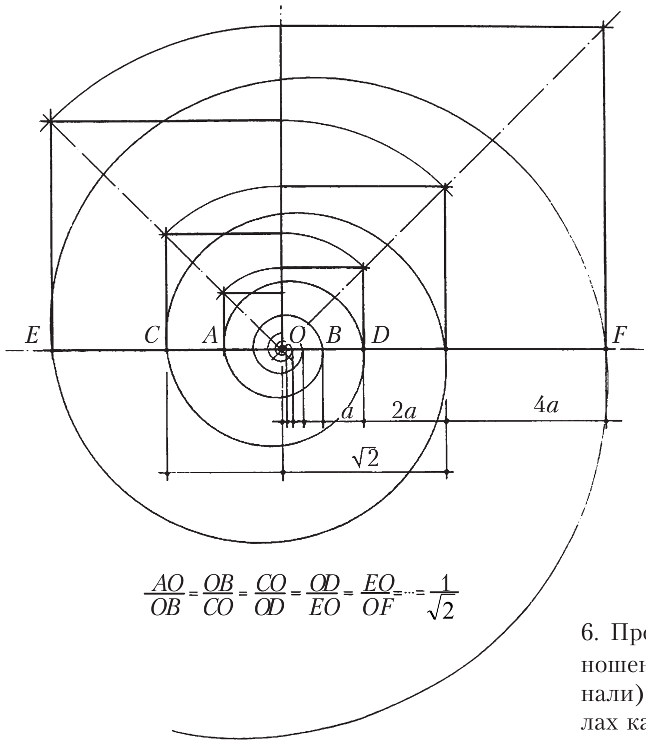




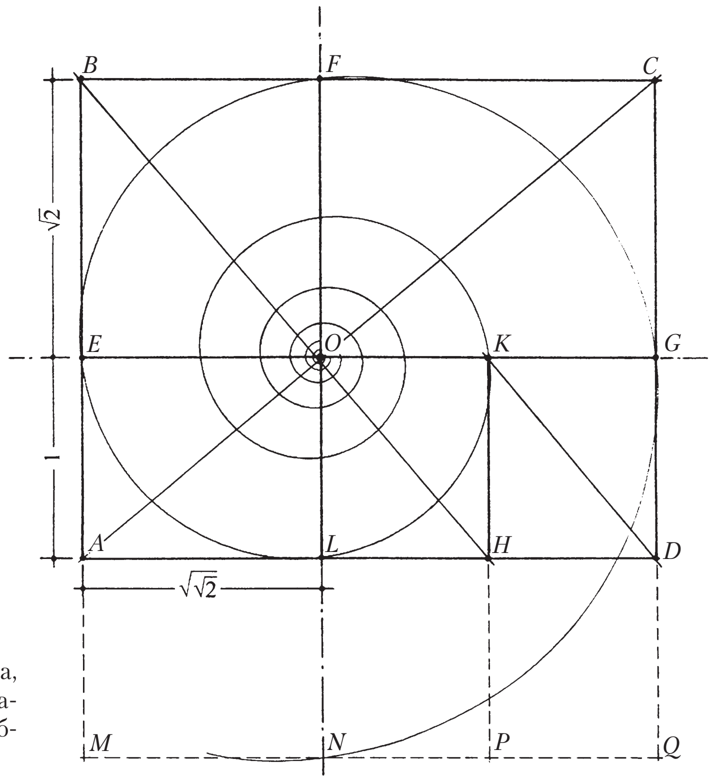
4. Примеры графиков аккордов трех основных тонов октавы



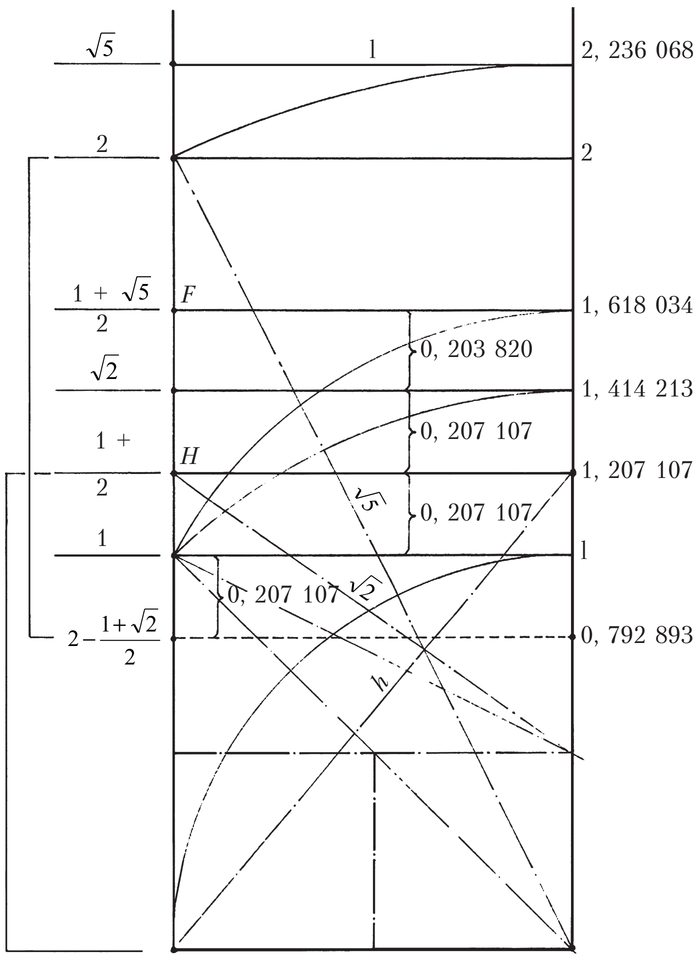
5. Деление касательной в пределах каждого витка графика звукоряда в отношении 4 : 5



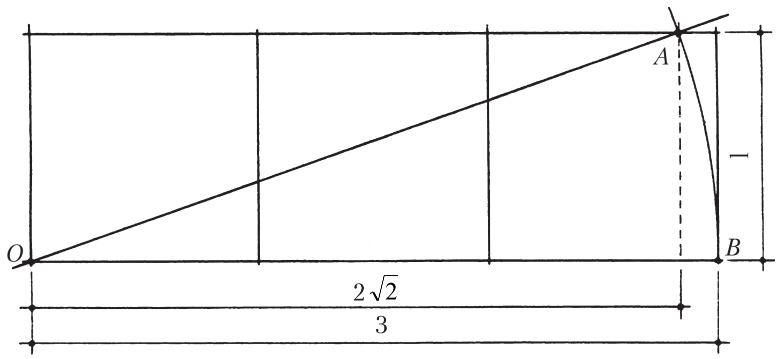
6. Пропорция Порстмана ($1:\sqrt{2}$ — отношение стороны квадраты к его диагонали) у противостоящих лучей в пределах каждого витка графика звукоряда



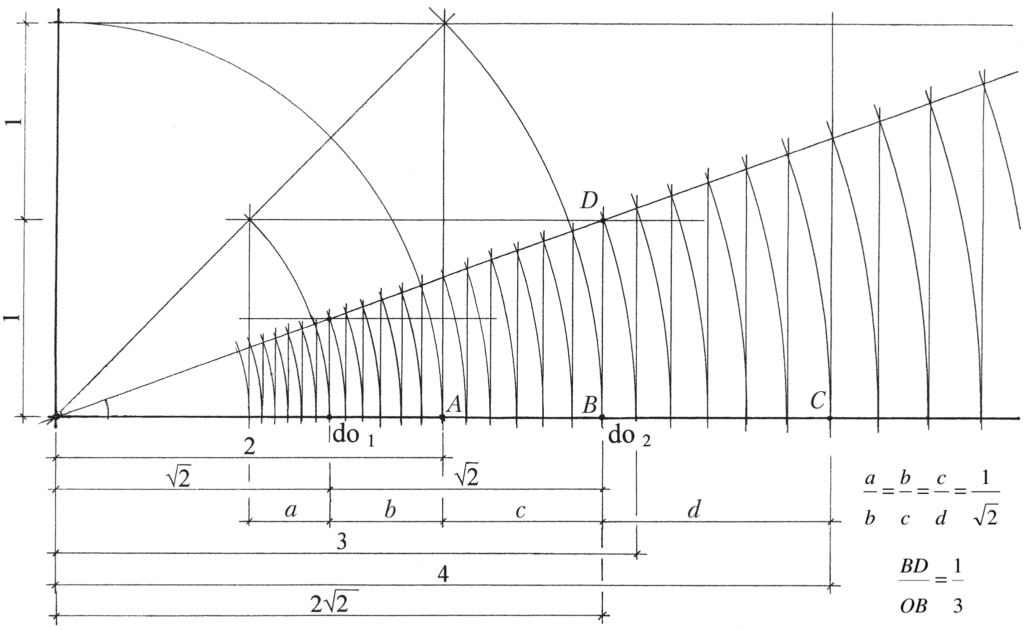
7. Деление прямоугольника, описанного вокруг витка графика звукоряда, на ему подобные с отношением сторон



8. Прямоугольник, описанный вокруг витка звукоряда, занимает промежуточное положение между квадратом и прямоугольником



9. Построение угла для получения значений частот звукоряда с помощью прямоугольника 1 : 3 («три квадрата»)



10. Получение значений частот звукоряда с помощью угла, построенного на основании прямоугольника 1 : 3

Буткевич О. В. Красота. Л., 1979. (2-е изд. Л., 1983.)

Волошинов А. В. Математика и искусство. М., 1992.

Гика М. Эстетика пропорций в природе и искусстве : пер. с фр. М., 1936.

Мессель Э. Пропорции в Античности и в Средние века : пер. с нем. М., 1936.

Радзюкевич А. В. Красивая сказка о «золотом сечении» [Электронный ресурс]. URL: http//www.sibdesign.ru/index.php?text=1&razdel=stat&textnew.

Хэмбидж Д. Динамическая симметрия в архитектуре : пер. с англ. М., 1936.

Шевелев И. Ш., Марутаев М. А., Шмелев И. П. Золотое сечение. М., 1990.

Статья поступила в редакцию 05.03.2010 г.